Philos.
5075

he Bibliothek
ensburg

los. 5075

SBR069026418281

23

Sammlung

physikalischer Aufgaben

nebst ihrer Auflösung.

Zum Gebrauch in Schulen und beym Selbstunterricht.

Von

Dr. Friedrich Kries,

Herzogl. Sachsen Coburg-Gothaischem Hofrath und Professor,
mehrerer gelehrten Gesellschaften Mitgliede.

Mit zwey Kupfer-Tafeln.

Jena,
Friedrich Frommann.

1843.

Bibliothek des K. Alten Gymnasiums Regensburg.
STUDIEN BIBLIOTHEK REGENSBURG

Staatliche Bibliothek
Regensburg

9. 1964/142

Vorrede.

Es kann nicht bezweifelt werden, daß der Unterricht in Sprachen und Wissenschaften ungemein gewinnt, wenn man den Lernenden in den Stand setzt, das Erlernte auf irgend eine Art in Anwendung zu bringen. Denn es wird dazu erfordert, daß man sich die Sachen vergegenwärtigt, und sie mit Aufmerksamkeit betrachtet; wodurch sie nicht nur dem Gedächtniß tiefer eingeprägt, sondern auch von dem Verstande besser aufgefaßt werden. Die Thätigkeit, in welche der Geist dabey versetzt wird, und die Befriedigung, die das Vollbringen einer Arbeit gewährt — zumal wenn sie nicht als mislungen erscheint — giebt der Beschäftigung einen eigenthümlichen Reiz, und wird der beste Sporn zum weitern Fortschreiten. Bey dem Sprachunterricht gewährt das Übersetzen aus der fremden Sprache in die Muttersprache, und umgekehrt, diesen Vortheil. Daher besteht eben hierin der größte Theil dieses Unterrichtes auf Schulen. Bey dem mathematischen Unterricht ist es vornehmlich die Arithmetik, in welcher der Fleiß der Schüler durch sogenannte Exempel angeregt und beschäftigt wird; und die vielfache Anwendbarkeit dieser Wissenschaft auf die verschiedenartigsten Gegenstände, selbst die des gemeinen Lebens, bietet den reichlichsten und mannigfaltigsten Stoff dazu dar. Man hat daher eine große Menge von Sammlun=

gen solcher Aufgaben, die nach den verschiedenen Stufen des Unterrichts und nach den verschiedenen Bedürfnissen der Lernenden eingerichtet sind. Auch für die Geometrie fehlt es nicht an ähnlichen Sammlungen; obgleich diese bey weitem nicht so zahlreich, als jene sind, da der Unterricht in diesem Theil der Mathematik nicht so allgemein verbreitet, und die Anwendbarkeit desselben viel beschränkter ist.

Was aber die Physik anbetrifft, so ist bisher noch wenig geschehen, um ihr einen gleichen Vortheil zuzuwenden, und den Unterricht in derselben durch ähnliche, zweckmäßig eingerichtete, Hülfsmittel zu fördern. Der Grund davon liegt wohl darin, daß man das Bedürfniß derselben noch nicht so sehr empfunden hat. Denn theils ist es noch nicht so lange, daß man diese Wissenschaft zu den Unterrichtsgegenständen der Schulen gezogen hat — auf vielen Lehranstalten ist es bis jetzt noch nicht geschehen — theils wird dem Unterricht in derselben an vielen Orten kein großes Gewicht beygelegt, und bey den öffentlichen Prüfungen der Schüler der Mangel an Kenntnissen in ihr nicht sehr beachtet. Gleichwohl ist nicht zu leugnen, daß die Physik sowohl durch den materiellen, als durch den formellen Nutzen, den sie gewähren kann, so sehr als irgend eine andere Wissenschaft zum Unterricht der Jugend geeignet ist. Es kommt nur darauf an, daß man sie nicht blos als einen Gegenstand der Unterhaltung behandelt, und sich begnügt, durch allerhand Versuche die Zuhörer oder Zuschauer zu ergötzen; sondern daß man auch die ernsthaftere Seite derselben auffaßt und aus dem Gegenstande der Anschauung einen Stoff des Nachdenkens und eine Beschäftigung des Verstandes ableitet. Was durch den Versuch vor Augen liegt, muß, so viel es sich thun läßt, aus Gründen dargethan, und durch Rechnungen und mathematische Figuren erläutert und erwiesen werden. Die Physik bietet die belehrendsten Beyspiele für mathe-

matische Rechnungen und Beweise dar. Es ist oft überraschend, was eine einzige einfache oder nicht sehr zusammengesetzte Formel für eine Mannigfaltigkeit von Erscheinungen unter sich begreift, und was aus einem einzigen Fall oft für eine Menge anderer abgeleitet werden können. Um aber einen physikalischen Gegenstand mathematisch zu behandeln, muß man die dabey vorkommenden Größen, ihre Verbindung unter einander, die Art ihrer Wirkung genau kennen und in der mathematischen Sprache darstellen. Dieß kann nicht ohne sorgfältige Untersuchung und genaue Erwägung der dabey vorkommenden Umstände geschehen. Alsdann bestimmt eben diese Darstellung den Gang, welchen die Rechnung zu nehmen hat, um das verlangte Resultat zu finden. Der Schüler hat also bey dieser Beschäftigung den doppelten Vortheil, den Gegenstand selbst genauer ins Auge zu fassen und sich dadurch tiefer einzuprägen, und dann sich in der dazu erforderlichen Rechnung zu üben. Es ist aber um so nöthiger, die Aufmerksamkeit desselben auf diese Art zu fesseln, je leichter er sich durch die Neuheit eines physikalischen Instruments und durch das Unterhaltende der Versuche zerstreuen, und durch die anscheinende Leichtigkeit der Sachen täuschen läßt. Es ist daher auch nicht rathsam, mit Versuchen gar zu freygebig zu seyn, und mehr, als zur Erläuterung eines Gegenstandes nöthig sind, anzustellen. Ich glaube also durch die Sammlung, die ich hier dem Publikum übergebe, keine überflüssige Arbeit unternommen zu haben. Dem Lehrer kann sie einige Erleichterung gewähren, und dem Schüler einen nützlichen Stoff für seinen häuslichen Fleiß darbieten.

Die Auflösungen sind mit gutem Bedacht den Aufgaben nicht unmittelbar beygefügt: der Schüler möge erst versuchen die Auflösung selbst zu finden, und erst da, wo ihm dieses nicht gelingt, das Buch zu Rathe ziehen. Vielleicht wird man=

cher der Meynung seyn, es wäre überhaupt besser gewesen, die Auflösungen ganz wegzulassen; weil mancher Schüler, anstatt sie selbst zu suchen, sie lieber abschreiben wird. Allein das Buch soll dem Fleißigen und Verständigen, nicht dem Trägen und Leichtsinnigen bestimmt seyn. Derjenige, welcher die ihm aufgegebenen Arbeiten lieber abschreibt, als selbst verfertigt, weiß den Lehrer auf hunderterley Weise zu hintergehen; für diesen ist es einerley, ob die Auflösung dasteht, oder nicht; er nimmt sie doch am liebsten irgendwo anders her. Die Strafe folgt ihm freylich auf dem Fuße nach: die Unwissenheit in dem was ihm zu wissen nützlich wäre. Aber es würde unrecht seyn, um dieser Leute willen den Fleißigen im Stich zu lassen. Diesem muß es erwünscht seyn, da, wo er einen Anstoß findet, auch bald eine Belehrung zu erhalten. Ob ihm diese aus dem Munde des Lehrers, oder aus dem Buche zu Theil wird, ist im Grunde einerley; genug, wenn er sie nur auffaßt und anwendet. Und wie, wenn ihm kein Lehrer zur Seite steht? Auch dieser Fall war zu berücksichtigen. Überdieß ist es auch dem Lehrer ein Leichtes, da wo ihm der Verdacht des Abschreibens entsteht, eine Aufgabe durch Unterlegung anderer Zahlen so abzuändern, daß die Auflösung im Buche nicht mehr paßt. Dieß ist überhaupt ein Mittel, die nur mäßige Anzahl von Aufgaben, die diese Sammlung enthält, ohne große Schwierigkeit, so sehr zu vervielfältigen, als man nur will, und so das Buch auch für mehr als einen Cursus brauchbar zu machen.

Aus der Lehre von der Wärme sind nur wenige, aus der von der Elektrizität und dem Magnetismus gar keine Aufgaben aufgeführt; weil die Auflösung derselben theils auf Versuchen beruht, die gewöhnlicherweise nicht in den Schulen angestellt werden; theils Kenntnisse erfordert, die bey einem Schüler nicht vorausgesetzt werden können.

In Frankreich, wo die Mathematik, Physik und Chemie

in den Lyceen noch in größerm Umfange, als auf unsern Schulen gelehrt wird, scheint man gleichfalls Aufgaben über Gegenstände dieser Wissenschaften als ein vorzügliches Mittel zu betrachten, die Zöglinge in ihren Kenntnissen zu befestigen und weiter zu bringen. Ich habe eine solche Sammlung vor mir liegen, die unter dem Titel: Nouveaux Problèmes de Physique etc. Par M. E. Bary. Paris, 1838. 8. erschienen ist. Aus dieser sind hier einige Aufgaben entlehnt worden; aber sonst ist der Zuschnitt derselben nicht für unsere Schulen eingerichtet. Sie enthält nicht nur vieles, was bey uns nicht berücksichtigt zu werden pflegt; sondern auch einen eigenen Abschnitt von Aufgaben, zu deren Auflösung die Rechnung des Unendlichen erfordert wird, die wohl nur auf wenigen deutschen Schulen gelehrt wird, und meiner Ansicht nach auch nicht in den Kreis der Lehrgegenstände auf Schulen gehört. Ich habe dieselbe hier nur ein paarmal zu Hülfe genommen, und das in Fällen, in denen zugleich ein elementarer Beweis gegeben werden konnte. Sonst erfordert die Auflösung der hier aufgestellten Aufgaben nur Kenntniß der elementaren Mathematik — freylich nicht in zu engem Sinn genommen. In einigen Fällen habe ich dabey auf mein Lehrbuch der reinen Mathematik — wobey die 6te Auflage zu verstehen ist — so wie auf mein Lehrbuch der Physik, 5te Auflage, verwiesen; indessen versteht es sich von selbst, daß auch andere Lehrbücher von ungefähr gleichem Umfange die Stelle derselben vertreten können.

Gotha, im Januar 1843.

Fr. Kries.

Druckfehler.

S. 10 Z. 6 v. o. lies ihm statt ihn
= — = 21 v. o. l. hatte er vor dem Stoß st. hat er
= 11 = 12 v. u. l. ist nach groß ausgelassen sind
= 25 = 14 v. o. l. Rezipienten st. Rezipiente
= 48 = 12 v. o. ist zu vor durchl. ausgelassen.
= 50 = 7 v. o. l. $a = b \cdot \cos C$ st. $a - b \cos C$
= 51 = 1 v. o. l. $K\sqrt{2(1 + \cos 50)}$ st. $K\sqrt{2}(1 + \cos 50)$
= 60 = 8 v. u. l. $y^{-\frac{1}{2}} dy$ st. $y - \frac{1}{2} dy$
= 78 = 20 v. o. l. $C^2 + G^2 \cos x^2$ st. $C^2 G^2 \cos x^2$
= 103 = 5 v. o. l. $\frac{v + s}{V + v + s}$ st. $\frac{V + s}{V + v + s}$
= — = — — — $\frac{V + v + s}{v + s}$ st. $\frac{V + v + s}{V + s}$.
= 110 = 1 v. u. l. $Vp' + q$ st. $Vp + q$
= 111 = 4 v. o. l. $\log (P - P'))]$ st. $\log (P - P')]$.
= 127 = 5 u. 8 v. u. l. ein kleines k st. K.
= 131 = 8 v. u. ist nach MN zu setzen „(Fig. 39.)“
= 144 = 16 v. o. l. $\cos y \cdot \cos b$ st. $\cos y \cos B$.

Erster Theil.
Physikalische Aufgaben.

Bestimmung des spezifischen Gewichts der Körper.

1. Ein Körper A halte $2\frac{1}{2}$ Cubikzoll und wiege $1\frac{3}{4}$ Pfund; ein anderer B halte $3\frac{1}{6}$ Cubikzoll und wiege $1\frac{1}{8}$ Pf. wie verhalten sich die spezifischen Gewichte derselben?

2. Es sey A = $4\frac{2}{3}$ Cubikzoll und wiege $2\frac{1}{2}$ Pf.
B = $2\frac{1}{6}$ „ „ „ $3\frac{5}{8}$ „

3. Es sey das spezifische Gewicht des Wassers zu dem des feinen Silbers, wie 1 : 10,51 und ein Pariser Duodecimal-Cubikzoll Wasser wiege 330,94 Gran köln. Gewicht — deren 240 auf ein Loth oder 7680 auf ein Pfund gehen — wie viel wiegt eine silberne Kugel von 9 Linien Durchmesser?

4. Es sey das spezifische Gewicht eines Körpers, A, = m — das spezifische Gewicht des Wassers = 1 gesetzt — das Gewicht eines Cubikzolles Wasser, in Granen ausgedrückt, = p, wie groß ist das Gewicht, x, einer Kugel aus der Materie A, wenn der Durchmesser derselben in Zollen ausgedrückt = d ist?

5. Aus dem absoluten Gewicht, x, einer Kugel, und aus dem spezifischen Gewicht, m, ihrer Materie den Halbmesser, r, derselben zu finden.

6. Das spezifische Gewicht des gegossenen Eisens sey = 7,207, wie groß der Halbmesser, r, einer eisernen Kugel, die 1 Pfund wiegt?

7. Ein kupferner Cylinder von 1 Par. Zoll Durchmesser und 2 Zoll Höhe, wiege 19,271 Loth köln. Gewicht, wie groß ist das spezifische Gewicht des Kupfers?

8. Eine bleyerne und eine elfenbeinerne Kugel von gleichem absoluten Gewicht werden an einer Waage aufgehängt, und ins Wasser getaucht — die bleyerne Kugel ganz, die elfenbeinerne nur so tief, daß wieder auf beyden Seiten ein Gleichgewicht entsteht; was für ein Theil der letztern muß alsdann im Wasser stecken, und was für einer in die Luft emporragen, wenn die spezifischen Gewichte des Wassers, Bleyes, Elfenbeins und der Luft = 1; 11,35; 1,92; 0,0013 sind?

9. Man setze an die Stelle der bleyernen Kugel eine kupferne, und anstatt der elfenbeinernen eine von Buchenholz; wie groß wird alsdann der Theil, x, der hölzernen Kugel seyn, der sich in das Wasser taucht, wenn das spezifische Gewicht des Kupfers = 8,897; das des Holzes = 0,854 ist?

10. Es sey allgemein das spezifische Gewicht des Metalles = a, das des andern, spezifisch leichtern, Körpers = b; das der Luft = d; das des Wassers = 1; beyde Körper haben gleiche absolute Gewichte, der metallene werde ganz ins Wasser getaucht; was für ein Theil, x, des andern muß sich eintauchen, wenn wiederum ein Gleichgewicht bestehen soll?

11. Eine Kugel von Platina und eine von Wachs sind, in der Luft gewogen, einander an Gewicht gleich; welches ist das wahre Verhältniß ihrer absoluten Gewichte, wenn die spezifischen Gewichte der Platina, des Wachses und der Luft = 22; 0,96; 0,0013 sind?

12. Eine Kugel aus einer Materie A, und eine andere aus B haben, in der Luft gewogen, gleiches Gewicht; wie verhalten sich ihre wahren Gewichte, wenn die spezifischen Gewichte von A, B und Luft = a, b, c sind?

13. In ein Gefäß, das theils mit Quecksilber, theils mit Wasser gefüllt ist, wird eine eiserne Kugel so eingetaucht, daß sie auf dem Quecksilber schwimmt, und übrigens ganz vom Wasser bedeckt ist; was für ein Theil derselben wird sich in das

Quecksilber senken, und was für einer vom Wasser umgeben seyn, wenn die spezifischen Gewichte des Quecksilbers, des Eisens und des Wassers = 13,6; 7,8; 1 sind?

14. Es sey allgemein das spezifische Gewicht des Quecksilbers = a; das des andern Körpers = b, das des Wassers = 1; wie groß ist der Theil dieses Körpers, der sich in das Quecksilber taucht?

15. Wenn eine hölzerne Kugel, die auf dem Wasser schwimmt, mit $\frac{3}{5}$ ihres Volumens im Wasser steckt, wie groß ist ihr spezifisches Gewicht, das spezifische Gewicht der Luft = 0,0013 gesetzt.

Bewegung der Körper.

16. Ein Körper durchlaufe in $5\frac{1}{2}$ Minute 10000 Fuß; ein anderer in $3\frac{1}{4}$ Minute 7800 Fuß, wie verhalten sich ihre Geschwindigkeiten?

17. Ein Schiff mache in 21 Stunden 32 Seemeilen, wie viel Meilen muß ein anderes in 10 Stunden machen, wenn seine Geschwindigkeit anderthalbmal so groß seyn soll?

18. Merkur braucht zu seinem Umlauf um die Sonne 88 Tage, bey einer Entfernung von 8,016400 geogr. Meilen; Uranus zu dem seinigen 30688 Tage, bey einer Entfernung von 397,272000 Meilen; wie vielmal geschwinder bewegt sich jener, als dieser?

19. A macht eine Reise von 72 Meilen in 50 Stunden; wie lange Zeit wird B zu einer Reise von 54 Meilen brauchen, wenn ihre Geschwindigkeiten sich wie 5 : 4 verhalten?

20. Ein Körper von 50 Pfunden werde durch eine Kraft, K, in 1 Secunde durch 480 Fuß getrieben; wie weit wird ein Körper von 240 Pf., durch eine dreymal stärkere Kraft getrieben, in 1 Sec. fliegen?

Der Widerstand der Luft wird hier bey Seite gesetzt.

21. Ein Körper von 120 Pf. werde in 1 Sec. durch 750 Fuß getrieben; wie weit wird ein anderer von 36 Pf.

durch eine Kraft, die nur $\frac{3}{4}$ so groß, als jene ist, in 1 Sec. getrieben werden?

22. Wenn eine Kraft, K, einen Körper von 24 Pf. in 1 Sec. durch 1500 Fuß treibt; wie groß muß die Kraft seyn, die einen Körper von 9 Pf. in 1 Sec. durch 1200 F. treibt?

23. Wenn ein Körper von 170 Pf. durch eine Kraft, K, in 1 Sec. 560 Fuß weit getrieben wird; wie schwer wird der Körper seyn müssen, welchen die Kraft, K′, in 1 Sec. durch 940 Fuß treiben soll, wenn $K : K' = 7 : 5$ sind?

24. Ein Körper werde von 2 Kräften getrieben, deren Richtungen einen Winkel von 24° 30′ einschließen, die eine treibe ihn in 1 Sec. durch 450 Fuß, die andere durch 320; wie weit wird der Körper in 1 Sec. fliegen?

25. Wenn ein Körper von 2 Kräften getrieben wird, deren Richtungen einen Winkel von 32° 40′ einschließen, und die eine Kraft ihn in 1 Sec. durch 680 Fuß treibt, wie groß muß die andere seyn, wenn der Körper durch 1000 Fuß in 1 Sec. fliegen soll?

26. Zwey Kräfte wirken auf einen Körper so, daß die eine ihn durch 750 Fuß, die andere durch 600 in 1 Sec. treiben könnte; welchen Winkel müssen ihre Richtungen mit einander einschließen, wenn der Körper in 1 Sec. 1200 Fuß weit fliegen soll?

27. Zwey gleiche Kräfte, die einen Winkel von 20° einschließen, sollen einen Körper durch 300 Fuß in 1 Sec. treiben; wie groß muß jede derselben seyn?

28. Wie weit wird ein Körper in 1 Sec. fliegen, der durch drey gleiche Kräfte getrieben wird, von denen jede allein ihn durch 100 Fuß in 1 Sec. treiben könnte, wenn beyde Winkel, die ihre Richtungen einschließen, einander gleich, und jeder = 25° wäre?

Fall der Körper.

29. Wie tief fällt ein Körper in $5\frac{1}{2}$ Sec., wenn er in der ersten durch 15,095 ... Par. Fuß fällt?

Der Widerstand der Luft wird bey diesen Aufgaben durchgehends bey Seite gesetzt.

30. Wie tief fällt ein Körper in der 6ten Secunde?

31. Wie viel Secunden braucht ein Körper, um aus einer Höhe von 740 Fuß bis auf die Erde zu fallen?

32. Mit was für einer Geschwindigkeit langt ein Körper auf der Erde an, der aus einer Höhe von 2500 Fuß herabfällt?

33. Zu welcher Höhe ist ein Körper gestiegen, der, senkrecht in die Höhe geworfen, nach $16\frac{1}{2}$ Secunde wieder auf die Erde zurückkommt?

34. Wie lange wird ein Körper ausbleiben, der, senkrecht in die Höhe geworfen, eine Höhe von 2000 Fuß erreicht?

35. Mit was für einer Geschwindigkeit muß ein Körper senkrecht in die Höhe geworfen werden, um 2000 Fuß hoch zu steigen?

36. Wie hoch steigt ein Körper, der mit einer Geschwindigkeit von 400 Fuß in der ersten Sec. senkrecht in die Höhe geworfen wird?

37. Wie hoch wird derselbe Körper steigen, und wie weit wird er fliegen, wenn er unter einem Winkel von 45° in die Höhe geworfen wird?

38. Unter welchem Winkel muß ein Körper in die Höhe geworfen werden, wenn er mit einer Geschwindigkeit von 180 Fuß in 1 Sec. fortgeschleudert wird, und 930 Fuß weit fliegen soll?

39. Mit was für einer Geschwindigkeit muß ein Körper, unter einem Winkel von 25 Graden fortgeschleudert werden, wenn er 179 Fuß weit fliegen soll?

40. Mit was für einer Geschwindigkeit muß ein Körper unter einem Winkel von 72 Graden in die Höhe geworfen werden, wenn er 1000 Fuß hoch steigen soll; und wie weit wird er fliegen?

41. Unter welchem Winkel muß ein Körper in die Höhe

geworfen werden, um bey einer anfänglichen Geschwindigkeit von 360 Fuß in 1 Sec. eine Höhe von 1200 F. zu erreichen?

42. Wie weit wird ein Körper fliegen, der in einer Höhe von 60 Fuß, in horizontaler Richtung, mit einer Geschwindigkeit von 100 Fuß in 1 Sec. fortgeschleudert wird?

43. Ein Körper A befinde sich mit dem Körper B in derselben Vertikallinie, jedoch 600 Fuß höher, als dieser, dessen Entfernung von der Erde 1000 Fuß sey. B fange an zu fallen, nachdem A schon 4 Secunden gefallen ist; nach wie viel Secunden wird A sich dem B auf 100 Fuß genähert, wann wird er ihn eingeholt haben, und wie viel Secunden nach dem Zusammentreffen wird ein jeder auf der Erde anlangen?

Der Fall in der ersten Secunde sey 15,1 Fuß.

44. Der Körper A sey 2000 Fuß von der Erde entfernt, B 1200 Fuß. Der letztre fange an zu fallen, wenn jener schon $6\frac{1}{2}$ Sec. gefallen ist; in welcher Zeit darauf wird A 200 Fuß vor B voraus seyn?

45. Es sey allgemein die Entfernung des Körpers B von der Erde $= h$; die des Körpers A $= h + m$. Nachdem A n Secunden gefallen ist, fange B an zu fallen; wie viel Secunden darauf wird A sich dem B bis auf eine Entfernung $= d$ genähert, wann wird er ihn eingeholt haben, und wann wird jeder auf der Erde anlangen? Fall in der ersten Secunde $= g$.

46. Ein Körper B befinde sich 400 Fuß von der Erde, und fange an zu fallen, wenn ein anderer, A, schon 5 Secunden gefallen ist; wie weit muß dieser von der Erde entfernt gewesen seyn, wenn beyde zu gleicher Zeit auf der Erde anlangen sollen?

47. Der Körper A sey 1800, B 700 Fuß von der Erde entfernt; wie tief muß A schon gefallen seyn, ehe B zu fallen anfängt, wenn jener 1 Secunde früher, als dieser, auf der Erde anlangen soll?

48. Ein Körper A falle aus einer Höhe von 1500 Fuß herab; ein anderer B werde in demselben Augenblick, wo je-

ner zu fallen anfängt, ihm gerade entgegen in die Höhe geworfen, mit einer Geschwindigkeit von 300 Fuß in einer Secunde; nach wie viel Secunden, und in welcher Höhe werden sie zusammentreffen?

---

49. Den Schwerpunkt einer physischen Ebene von durchgehends gleicher Beschaffenheit und der Gestalt eines Dreyecks zu finden.

Die Dicke der Ebene kommt hierbey nicht in Betrachtung.

50. Den Schwerpunkt eines physischen Parallelogramms von durchgehends gleicher Beschaffenheit zu finden.

51. Den Schwerpunkt einer physischen Ebene in Gestalt eines Trapeziums zu finden.

52. Wie groß ist die Kraft, mit welcher ein Körper von 150 Pfund von einer schiefen Ebene, deren Neigungswinkel 25 Grad beträgt, herabgetrieben wird? und wie groß ist der Druck desselben gegen die schiefe Ebene?

Der Widerstand der Reibung und der Luft wird hier durchgehends bey Seite gesetzt.

53. Wie groß muß der Neigungswinkel einer schiefen Ebene seyn, auf welcher eine Last von 480 Pfund durch ein Gegengewicht von 200 Pfund herabzugleiten gehindert wird?

54. Wenn eine schiefe Ebene bey einem Neigungswinkel von 32 Grad durch einen darauf liegenden Körper einen Druck von 230 Pfund zu erleiden hat, wie groß muß das Gewicht des Körpers seyn?

55. Es sey der Neigungswinkel einer schiefen Ebene 30 Grad, wie weit wird ein Körper auf ihr in $2\frac{1}{2}$ Secunde herabgleiten?

56. Aus einer Höhe AB (Fig. 4.) von 240 Fuß fangen zwey Körper, A und B, zu gleicher Zeit an sich zu bewegen, der eine A, im freyen Fall, der andere B, auf der schiefen Ebene AC. Dem letztern werde durch einen Stoß noch eine Geschwindigkeit von 90 Fuß in 1 Sec. ertheilt; wie lang muß AC seyn, wenn beyde zugleich auf der Erde anlangen sollen?

57. Es sey allgemein die Höhe AB = h; der Fallraum in der ersten Sec. = g; die dem Körper B durch den Stoß ertheilte Geschwindigkeit = K, wie groß muß AC seyn, wenn beyde Körper zugleich die Erde erreichen sollen?

58. Es sey die Höhe AB = 540 Fuß, die Länge der schiefen Ebene AC = 900, was für eine Geschwindigkeit muß man dem Körper B noch ertheilen, damit er mit A zugleich unten anlange?

59. Einen allgemeinen Ausdruck für K zu finden.

60. Eine schiefe Ebene, AC, sey 150 Fuß lang, und steige zu einer Höhe AB = 60 Fuß; mit welcher anfänglichen Geschwindigkeit muß eine Kugel aus C aufwärts gerollt werden, damit sie gerade bis A aufsteige? und wie lange Zeit wird sie dazu brauchen?

61. Zwey schiefe Ebenen AB, AD (Fig. 5.), stoßen in A zusammen, AB = 1000, AD = 800 F.; die gemeinschaftliche Höhe, AC, beträgt 300 Fuß. Mit welcher Geschwindigkeit müssen 2 Kugeln auf ihnen in die Höhe getrieben werden, damit beyde in derselben Zeit, in 5 Secunden, die Höhe erreichen?

62. Einen allgemeinen Ausdruck für die Geschwindigkeit, K, zu finden, mit welcher ein Körper auf einer schiefen Ebene von der Länge, l, und Höhe, h, hinangetrieben werden muß, um in einer bestimmten Zeit, t, die Höhe derselben zu erreichen.

63. Es sey eine Vertikallinie MN (Fig. 6.) von unbestimmter Länge, und ein Punkt A außerhalb derselben, in einem Abstand AB = a gegeben, man soll die gerade Linie, AC, oder die Lage der Ebene, AC, finden, auf welcher ein schwerer Körper aus A in der kürzesten Zeit nach MN komme, blos durch die Schwere getrieben.

64. In einer Röhre, AB (Fig. 7.), die unter einem Winkel von 45° gegen die Horizontalfläche, HR, geneigt ist, sey eine kleine bleyerne Kugel, M, befindlich; mit welcher Geschwindigkeit muß sich die Röhre um die Vertikallinie, CB,

kegelförmig herumdrehen — d. i. so, daß sie einen Kegel um CB, als dessen Achse, beschreibt — wenn die Kugel nicht herabgleiten soll? Die Höhe MN sey 12 Fuß.

65. Unter welchem Winkel muß eine Röhre, wie bey der vorhergehenden Aufgabe, gegen die Horizontalfläche geneigt seyn, wenn die Kugel 9 Fuß über dem Boden erhöht ist, und die Röhre in 4 Secunden ihre jedesmalige kegelförmige Umdrehung vollendet, damit die Kugel nicht herabgleite?

66. Es sey der Neigungswinkel der Röhre 60 Grad, und sie vollende einen ganzen kegelförmigen Umschwung in 3 Secunden; in welcher senkrechten Höhe muß die Kugel angebracht seyn, um nicht herabzugleiten?

67. Wenn das Secunden-Pendel in Gotha 440,693 Par. Lin. lang ist, wie lang muß daselbst das Pendel seyn, das halbe Secunden schwingt?

68. Wie viel Schwingungen wird daselbst ein Pendel von 6 Par. Zoll in 1 Secunde machen?

69. Wie verhalten sich die Längen zweyer Pendel, deren Schwingungszeiten sich wie 7 : 3 verhalten?

70. Wenn die Längen zweyer Pendel sich wie 8 : 5 verhalten, wie die Schwingungszeiten derselben?

71. Wenn das Secundenpendel unter dem Aequator 439,317 Par. Lin. unter dem 25sten Grade der Breite 440,424, P. L. lang ist, wie lang ist es unter dem Pol?

Stoß der Körper.

72. Ein harter Körper von 9 Pfund werde mit einer Geschwindigkeit von 250 Fuß in 1 Secunde fortgetrieben; mit welcher Geschwindigkeit muß ein anderer harter Körper von 12 Pf. ihm gerade entgegen getrieben werden, wenn beyde nach dem Zusammenstoß ruhen sollen?

73. Ein harter Körper A von 15 Pf. bewege sich mit einer Geschwindigkeit von 80 Fuß in 1 Sec. — Ein anderer harter Körper B von 24 Pf. werde ihm gerade entgegen getrieben, mit einer Geschwindigkeit von 130 F. in 1 Sec. —

mit welcher Geschwindigkeit werden sie nach dem Zusammenstoß fortgehen?

74. Ein harter Körper A von 65 Pf. bewege sich mit einer Geschwindigkeit von 100 Fuß in 1 Sec.; mit welcher Geschwindigkeit muß ein anderer harter Körper B von 40 Pf. ihn entgegen stoßen, wenn ihre Geschwindigkeit in der Richtung von A nur noch 50 F. betragen soll?

75. Zwey harte Körper, A und B, wiegen zusammen 160 Pf.; A bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 75 F. in 1 Sec., B mit einer von 45 F. Sie stoßen gerade gegen einander und nach dem Zusammenstoß ist ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit, in der Richtung des Körpers A, 20 F.; wie viel Pfund wog ein jeder?

76. Zwey harte Körper, A und B, die zusammen 560 Pfund wiegen, bewegen sich gegen einander: die Geschwindigkeit von A ist dreymal so groß, als die von B; der Unterschied ihrer in 1 Sec. durchlaufenen Strecken = 60 Fuß. Sie stoßen gerade gegen einander, und nach dem Zusammenstoßen ist ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit 40 Fuß in 1 Sec. in der Richtung von A; wie viel wiegt jeder Körper, und welche Geschwindigkeit hat er?

77. Zwey harte Körper, A und B, gehen nach einerley Richtung: B, von 48 Pfund, mit einer Geschwindigkeit von 50 Fuß in 1 Sec.; ihm folgt A, von 72 Pfund, mit einer Geschwindigkeit von 80 Fuß in 1 Sec.; wie groß ist ihre Geschwindigkeit nach dem Zusammentreffen?

78. Wenn zwey harte Körper, A von 130, B von 80 Pf. nach einerley Richtung gehen, jener mit einer $2\frac{1}{2}$ mal so großen Geschwindigkeit, als dieser, und ihre Geschwindigkeit nach dem Stoß 54 Fuß in 1 Sec. beträgt, wie groß ist die Geschwindigkeit eines jeden vor demselben?

79. Zwey harte kugelförmige Körper, A und B, von gleichen Massen bewegen sich mit gleicher Geschwindigkeit, von 100 Fuß in 1 Sec., schief gegen einander, A in der Richtung MA (Fig. 8.), B in der Richtung NB; sie treffen

in E zusammen, und denkt man sich dann eine Ebene, CD, so durch E gelegt, daß die Linie AB, die beyder Kugeln Mittelpunkte verbindet, senkrecht auf derselben steht, so sollen die Richtungslinien ihrer Bewegung verlängert die Ebene in demselben Punkt, D, und unter gleichen Winkeln, von 24 Grad, treffen; nach welcher Richtung und mit welcher Geschwindigkeit werden die Kugeln nach dem Stoß fortgehen?

80. Man nehme an, die Kugel A wiege 5 Pfund und bewege sich mit einer Geschwindigkeit von 80 Fuß in 1 Sec. unter einem Winkel von 18 Grad gegen die durch E gelegte Ebene, CD; B hingegen wiege 3 Pf. und bewege sich mit einer Geschwindigkeit von 50 Fuß in 1 Sec. unter einem Winkel von 35 Grad gegen die Berührungsebene CD; nach welcher Richtung und mit welcher Geschwindigkeit wird jede Kugel nach dem Zusammenstoßen fortgehen?

81. Man bezeichne allgemein die Masse der Kugel A durch M, ihre Geschwindigkeit durch G, und den Winkel, unter welchem sie sich gegen die Berührungsebene CD bewegt, durch x; und für den Körper B mögen m, g, y ähnliche Bedeutungen haben; man soll daraus die Geschwindigkeit und Richtung einer jeden Kugel nach dem Zusammenstoßen bestimmen.

82. Wie ändert sich der allgemeine Ausdruck für C (dessen Bedeutung aus der Auflösung Nr. 81. erhellet), wenn die Massen beyder Kugeln gleich groß? Und wenn bey gleichen Massen A eine Geschwindigkeit von 120 Fuß in 1 Sec. unter einem Winkel von 25 Grad, B eine Geschwindigkeit von 76 F. in 1 Sec. unter einem Winkel von 30 Grad gegen die Berührungsebene hat, wie wird ihre Bewegung nach dem Zusammenstoßen beschaffen seyn?

83. Die Kugel A wiege 12 Pfund und bewege sich mit einer Geschwindigkeit von 60 Fuß in 1 Sec. und unter einem Winkel von 30 Grad gegen die Berührungsebene, während die Kugel B 4 Pf. wiegt und vor dem Stoße ruht; was für eine Bewegung werden beyde Kugeln nach dem Stoße zeigen?

84. Die Massen beyder Kugeln mögen gleich seyn und

B vor dem Stoße ruhen, A aber sich mit einer Geschwindigkeit von 64 Fuß in 1 Sec. unter einem Winkel von 28 Grad gegen die Berührungsebene bewegen, was für eine Bewegung werden beyde Kugeln durch das Zusammenstoßen erhalten?

85. Wenn jede der beyden Kugeln 6 Pfund schwer ist, A eine Geschwindigkeit von 60 Fuß in 1 Sec. hat und unter einem Winkel von 25 Grad gegen die Berührungsebene geht; B hingegen sich senkrecht gegen diese bewegt, welche Geschwindigkeit muß B haben, wenn es nach dem Stoße ruhen soll, und welche Geschwindigkeit und Richtung wird A bekommen?

86. Wenn, bey gleichen Massen beyder Kugeln, B als ruhend angenommen wird, durch den Stoß von A aber eine Geschwindigkeit von 15 Fuß in 1 Sec. erhalten soll; mit welcher Geschwindigkeit muß sich A vor dem Stoße bewegen, wenn die Richtung seiner Bewegung gegen die Berührungsebene 21 Grad beträgt? und welche Geschwindigkeit und Richtung wird es nach dem Stoße haben?

87. Wenn die Masse von A noch einmal so groß, als die von B ist, die Geschwindigkeit von A = 45 Fuß, und der Winkel, unter welchem es sich gegen die Berührungsebene bewegt, = 20 Grad; B hingegen eine Geschwindigkeit von 60 Fuß in 1 Sec. hat; wie groß muß der Winkel seyn, unter welchem es sich gegen CD bewegt, wenn beyde Körper nach dem Stoß in einer mit CD parallelen Richtung fortgehen sollen, und zwar entweder nach derselben Seite, oder nach entgegengesetzten Seiten? und welche Geschwindigkeiten werden sie haben?

88. Wenn A 3 Pfund wiegt und eine Geschwindigkeit von 50 Fuß in 1 Sec. hat, B dagegen 2 Pf. und ruht, durch den Stoß aber eine Geschwindigkeit von 10 Fuß bekommen soll; wie groß muß der Winkel seyn, unter welchem A gegen die Berührungsebene getrieben wird, und mit welcher Geschwindigkeit und unter welchem Winkel wird es seine Bewegung nach dem Stoß fortsetzen?

89. Es sey A = B, und B ruhend. Nach dem Stoß

soll B eine Geschwindigkeit von 16 Fuß bekommen, und A eine Geschwindigkeit von 60 Fuß behalten. Wie groß muß die Geschwindigkeit des letztern vor dem Stoße, und wie groß der Winkel seiner Bewegung gegen die Berührungsebene vor und nach dem Stoß seyn?

90. Wenn A 4 Pfund wiegt, und sich mit einer Geschwindigkeit von 30 Fuß in 1 Sec. unter einem Winkel von 18 Grad gegen die Berührungsebene bewegt; wie schwer muß B seyn, wenn es sich mit einer Geschwindigkeit von 24 Fuß unter einem Winkel von 12 Grad gegen die Berührungsebene bewegt, und der Theil der Bewegung beyder Körper, der nach dem Zusammenstoßen als senkrecht gegen die Berührungsebene anzusehen ist, eine Geschwindigkeit von 8 Fuß haben soll? Wie groß wird überdieß die Geschwindigkeit seyn, mit welcher, und der Winkel gegen die Berührungsebene, unter welchem die Körper nach dem Stoß fortgehen?

91. Wenn A und B gleiche Massen, und vor dem Zusammenstoßen auch gleiche Geschwindigkeit, nämlich von 50 Fuß in 1 Sec., haben; unter welchen Winkeln müssen sie gegen die Berührungsebene gehen, wenn A nach dem Zusammenstoßen eine Geschwindigkeit von 40, B eine von 36 Fuß erhalten soll? und wie groß werden die Winkel seyn, die ihre Bewegung alsdann gegen die Berührungsebene macht?

92. Wenn A 7 Pfund, B 3 Pf. wiegt; A vor dem Zusammenstoßen eine Geschwindigkeit von 40 Fuß, B von 24 F. hat; unter welchen Winkeln müssen sie sich gegen die Berührungsebene bewegen, wenn A nach dem Stoß eine Geschwindigkeit von 32 Fuß, B von 20 F. erhalten soll? und welche Winkel werden sie dabey gegen die Berührungsebene machen?

93. Es sey allgemein die Masse von A = M, die von B = m, die Geschwindigkeit von A vor dem Stoß = G, nach dem Stoße = D; die von B vor dem Stoße = g, nach dem Stoße = d; man soll die Winkel, welche die Richtung ihrer Bewegung vor und nach dem Stoß mit der Berührungsebene macht, finden.

94. Wie ändert sich der allgemeine Ausdruck für die Winkel x, y, z und u, 1) wenn die Massen gleich; 2) wenn sowohl die Massen, als die Geschwindigkeiten vor dem dem Stoße, gleich gesetzt werden?

95. Wenn zwey vollkommen elastische und kugelförmige Körper, A und B, central gegen einander stoßen, A, 60 Pfund schwer, eine Geschwindigkeit von 30 Fuß; B, 12 Pfund schwer, eine Geschwindigkeit von 10 Fuß in 1 Sec. hat; was für eine Bewegung werden beyde nach dem Stoß haben?

96. Was für eine Geschwindigkeit müßte der Körper B, bey derselben Masse wie vorhin, vor dem Stoße haben, wenn A, bey der nämlichen Schwere und Geschwindigkeit wie vorhin, nach dem Stoße ruhen sollte? und welche Geschwindigkeit wird B nach dem Stoße bekommen?

97. Was für eine Geschwindigkeit muß B vor dem Stoße haben, wenn, alles übrige wie vorhin angenommen, A zurückprallen soll?

98. Es habe A ein Gewicht von 10 Pfund, und eine Geschwindigkeit von 50 Fuß; B wiege 6 Pfund; mit was für einer Geschwindigkeit muß dieser sich gegen A bewegen, um mit einer gleichgroßen Geschwindigkeit zurückzuprallen?

99. Das Gewicht von A sey 18 Pfund, seine Geschwindigkeit 40 Fuß in 1 Sec.; B wiege 10 Pfund; mit welcher Geschwindigkeit muß der letztere sich bewegen, wenn der erstere mit einer Geschwindigkeit von 15 Fuß zurückprallen soll? und welche Geschwindigkeit wird B dadurch bekommen?

100. Mit welcher Geschwindigkeit muß sich der Körper A vor dem Stoß bewegen, wenn er, bey einem Gewicht von 25 Pfund, nach dem Zusammenstoßen noch mit einer Geschwindigkeit von 20 Fuß vorwärts gehen soll, und der Körper B, bey einem Gewicht von 11 Pfund, eine Geschwindigkeit von 30 Fuß hat? und wie wird sich B nach dem Stoß verhalten?

101. Wie groß muß das Gewicht von A seyn, wenn die

Geschwindigkeit desselben vor dem Stoß = 40, und nach dem Stoß = 16 F. in derselben Richtung ist; während das Gewicht von B 18 Pf. und seine Geschwindigkeit 24 Fuß beträgt? und was wird B für eine Bewegung nach dem Stoß bekommen?

102. Es sey die Summe der Gewichte beyder Körper = 75 Pfund; die Geschwindigkeit von A vor dem Stoß = 70, nach dem Stoß = 20 Fuß; die Geschwindigkeit von B vor dem Stoß = 30 Fuß; wie schwer ist jeder Körper, und wie groß die Geschwindigkeit von B nach dem Stoß?

103. Der Körper A wiege 15; B 5 Pf.; wie groß muß ihre Geschwindigkeit vor dem Stoß seyn, wenn A nach demselben mit einer Geschwindigkeit von 24 Fuß fortgehen, B mit einer von 48 Fuß zurückprallen soll?

104. Bey dem schiefen Stoß elastischer Kugeln muß, wie bey dem schiefen Stoß harter Körper, eine Berührungsebene angenommen werden, auf welcher die gerade Linie durch beyder Kugeln Mittelpunkte und den Berührungspunkt beym Zusammenstoßen senkrecht steht, und gegen welche die Richtung der bewegten Körper bestimmt wird.

Wenn also die elastische Kugel A, 18 Pfund schwer, mit einer Geschwindigkeit von 30 Fuß in 1 Sec. unter einem Winkel von 16 Grad gegen die Berührungsebene geht, und B, bey einem Gewicht von 7 Pfund und einer Geschwindigkeit von 12 Fuß, einen Winkel von 24 Grad gegen die Berührungsebene beschreibt; wie werden sich ihre Bewegungen nach dem Stoß verhalten?

105. Wie ändern sich die Bewegungen beyder Körper nach dem Stoß, wenn A 42 Pfund wiegt, eine Geschwindigkeit von 80 Fuß in 1 Sec. hat, und unter einem Winkel von 25 Grad gegen die Berührungsebene geht; B hingegen 14 Pf. schwer ist, 30 Fuß in 1 Sec. durchläuft, und einen Winkel von 18 Grad gegen die Berührungsebene beschreibt?

106. Wie ändern sich die allgemeinen Ausdrücke für C und c, wenn die Massen beyder Körper gleich groß ange-

nommen werden? und wie lassen sich alsdann die Werthe von D und d ausdrücken?

107. Wenn bey gleichen Massen beyder Körper A sich mit einer Geschwindigkeit von 100 Fuß in 1 Sec. unter einem Winkel von 40 Grad gegen die Berührungsebene bewegt; B hingegen mit einer Geschwindigkeit von 45 Fuß unter einem Winkel von 25 Grad; wie sind ihre Bewegungen nach dem Zusammenstoßen beschaffen?

108. Wenn bey gleichen Massen beyder Körper überdieß B als ruhend angenommen wird; A hingegen sich mit einer Geschwindigkeit von 120 Fuß unter einem Winkel von 72 Grad gegen die Berührungsebene bewegt; was für eine Bewegung werden beyde Körper nach dem Stoße haben?

109. Wenn A sich mit einer Geschwindigkeit von 20 Fuß, unter einem Winkel von 32 Grad gegen die Berührungsebene bewegt, und nach dem Stoß mit einer Geschwindigkeit von 18 Fuß zurückfährt, wie groß muß seine Masse seyn, wenn B, bey einem Gewicht von 8 Pfund, sich mit einer Geschwindigkeit von 16 Fuß, unter einem Winkel von 45 Grad gegen die Berührungsebene bewegt? und welche Geschwindigkeit wird B nach dem Stoß bekommen?

110. Wenn A ein Gewicht von 15 Pfund und eine Geschwindigkeit von 54 Fuß hat, und unter einem Winkel von 20 Grad gegen die Berührungsebene geht; was für ein Gewicht muß B haben, wenn seine Geschwindigkeit vor dem Stoß 21 F. beträgt, es unter einem Winkel von 12 Grad gegen die Berührungsebene geht, und A nach dem Stoß mit einer Geschwindigkeit von 50,76 Fuß vorwärts gehen soll? was für eine Bewegung wird überdieß B nach dem Stoß bekommen?

111. Welches ist der allgemeine Ausdruck für M, wenn G, x und D, ingleichen m, g und y gegeben sind; und wie wird m aus M, G, x, D, g und y bestimmt?

112. Wenn, bey gleichen Gewichten beyder Körper, A sich unter einem Winkel von 50 Grad gegen die Berührungsebene bewegt, und nach dem Stoß mit einer Geschwindigkeit

von 30 Fuß zurückfährt; B dagegen sich mit einer Geschwindigkeit von 25 Fuß, unter einem Winkel von 35 Grad gegen die Berührungsebene bewegt; was für eine Geschwindigkeit muß A vor dem Stoße haben? und was für eine wird B nach dem Stoß bekommen?

113. Sind die Gewichte beyder Körper ungleich, A 5 Pfund, B 3 Pfund schwer, und bewegt A sich unter einem Winkel von 30 Grad, B hingegen mit einer Geschwindigkeit von 4 Fuß unter einem Winkel von 16 Grad gegen die Berührungsebene; was für eine Geschwindigkeit muß A vor dem Stoß haben, wenn es nach demselben mit einer Geschwindigkeit von 8,671 .. Fuß in 1 Sec. fortgehen soll? und was für eine Geschwindigkeit wird B nach dem Stoß bekommen?

114. Wie läßt sich auf eine allgemeine Art G aus M, x, D, m, g und y bestimmen? und wie ändert sich der Ausdruck 1) wenn M = m, 2) wenn überdieß g = o d. i. B als ruhend vor dem Stoß angenommen wird?

115. Wie läßt sich auf eine allgemeine Weise x aus M, m, G, g, D und y finden? Und wie ändert sich der Ausdruck, wenn x gegeben und y gesucht wird?

116. Wie ändern sich die allgemeinen Ausdrücke für sin x und für sin y, wenn d anstatt D gegeben ist?

117. Welches sind die Grenzen der Werthe von x und y, wenn M = 8, G = 20, D = 9; m = 5; g = 12 angenommen wird?

118. Wie ändern sich die Ausdrücke für sin x und sin y in Nr. 115, wenn M = m gesetzt wird?

119. Wenn zehn vollkommen elastische Kugeln in einer Reihe so aufgehängt sind, daß eine gerade Linie durch aller Kugeln Mittelpunkte geht, und die Massen der Kugeln eine geometrische Progression bilden, deren Exponent 2 ist, wenn dann die größte gegen die nächste mit einer Geschwindigkeit von 5 Fuß in 1 Secunde central gestoßen wird, mit welcher Geschwindigkeit wird die kleinste wegfliegen?

120. Mit was für einer Geschwindigkeit müßte die größte

Kugel in der vorigen Reihe gegen die nächste gestoßen werden, wenn die kleinste mit einer Geschwindigkeit von 100 Fuß in 1 Sec. wegfliegen soll?

Gleichgewicht fester Körper.

121. Der eine Arm eines doppelarmigen Hebels sey $3\frac{1}{4}$ Fuß lang und trage ein Gewicht von $9\frac{7}{8}$ Pfund; der andere sey $5\frac{2}{3}$ Fuß, wie groß muß das an demselben befindliche Gewicht seyn, wenn ein Gleichgewicht statt finden soll?

122. Die ganze Länge eines Hebels betrage $8\frac{1}{6}$ Fuß, an dem einen Ende hängen $25\frac{3}{8}$, an dem andern $17\frac{1}{2}$ Pfund; wo muß das Hypomochlium liegen, oder, wie lang muß jeder Arm seyn, wenn ein Gleichgewicht statt finden soll?

123. Es sey der eine Arm eines Hebels $9\frac{1}{3}$, der andere $5\frac{1}{2}$ Fuß lang; an ihren Enden sollen zusammen $42\frac{101}{165}$ Pfund so aufgehängt werden, daß ein Gleichgewicht entsteht; wie viel Pfund gehören an jeden Arm?

124. Der eine Arm eines Hebels sey 60, der andere 42 Zoll lang; an jenen sollen 80, an diesen 100 Pfund kommen, doch so, daß an das Ende von jenem nur 50, an das Ende von diesem nur 75 Pf. gehängt werden; an welcher Stelle müssen die noch übrigen Pfunde auf jeder Seite angebracht werden, wenn ein Gleichgewicht entstehen soll?

125. Wenn an einem Winkelhebel, dessen einer Arm 5, der andere 3 Fuß lang ist, ein Gewicht von 70 Pf. an dem längern Arm unter einem Winkel von 54 Grad gegen denselben wirkt; wie groß muß das Gewicht seyn, das an dem andern Arm, unter einem Winkel von 40 Grad, mit jenem ein Gleichgewicht erzeugt?

126. Wenn der eine Arm eines Winkelhebels 4 Fuß lang ist und ein Gewicht von 130 Pf., unter einem Winkel von 46 Grad, auf denselben wirkt; wie lang muß der andere Arm seyn, wenn ein Gewicht von 200 Pf. an demselben, unter einem Winkel von 65 Grad, ein Gleichgewicht bewirken soll?

127. Es sey der eine Arm eines Winkelhebels 38 Zoll lang mit einem Gewicht von 10 Pf. unter einem Winkel von 64 Grad versehen; der andere Arm sey 25 Zoll lang und mit einem Gewicht von 15 Pf. beschwert; unter welchem Winkel muß dieses auf ihn wirken, wenn ein Gleichgewicht entstehen soll?

128. An dem einen Arm eines Winkelhebels, von 45 Zoll Länge, hänge ein Gewicht von 30 Pf.; an dem andern, von 32 Zoll Länge, hängen 24 Pf.; unter welchen Winkeln müssen sie auf die Arme wirken, wenn der Winkel an dem kürzern Arm noch einmal so groß, als der an dem längern seyn, und ein Gleichgewicht entstehen soll?

129. Wie läßt sich auf einer unrichtigen Wage, d. i. auf einer solchen, deren einer Arm etwas länger, als der andere ist, das richtige Gewicht eines Körpers, A, finden?

130. Was wird das wahre Gewicht eines Körpers seyn, der, wenn er an dem längern Arm hängt, durch $13\frac{1}{2}$ Pf. aufgewogen wird; aber an den kürzern gebracht, noch einen Zusatz von $3\frac{3}{16}$ Pf. erhalten muß, um mit jenem Gewicht im Gleichgewicht zu seyn? und welches ist das Verhältniß der Arme?

131. Wenn hingegen der Körper, an dem kürzern Arm aufgehängt, durch 12 Pf. an dem längern aufgewogen wird; und nach Verwechselung der Gewichte, noch 15 Pf. zu den 12 Pf. hinzukommen müssen, um ein Gleichgewicht hervorzubringen; wie schwer ist dann der Körper? und wie verhalten sich beyde Arme zu einander?

132. Ein Gewicht, p, in die eine Schale, A, einer unrichtigen Wage gelegt, werde vor einem Gewicht, x, in der andern Schale, B, aufgewogen. Darauf lege man p in die Schale B, und ein Gewicht, y, in die Schale A, das jenem das Gleichgewicht hält; werden die beyden Gewichte, x und y, zusammen größer oder kleiner, als 2p, seyn, und wie viel wird der Unterschied betragen?

133. Ueber zwey Rollen, A, B, (Fig. 10.) gehe ein

Seil ACB, an dessen Enden die Gewichte, P = 10 Pf. Q = 6 Pf., hängen; aus C hänge ein Gewicht, K; wie groß muß dieses seyn, um den beyden andern das Gleichgewicht zu halten, wenn CA mit der Horizontallinie, Cm, einen Winkel von 40 Grad; CB mit Cn einen Winkel von 60 Grad macht?

134. Ueber die Rollen, A, B, (Fig. 11.) gehe ein Seil PACBQ; aus C hänge ein Gewicht, K, von 30 Pf.; das Gewicht Q betrage 22,98 Pf., wie groß muß das Gewicht P seyn, wenn CB einen Winkel von 50, CA einen Winkel von 40 Grad mit der Horizontallinie, mn, macht, und ein Gleichgewicht statt finden soll?

135. Bey einer ähnlichen Verbindung dreyer Gewichte an einem Seil sey P = 24, Q = 36; K = 50 Pf.; unter welchen Winkeln gegen die Horizontallinie müssen die Gewichte P und Q wirken, wenn ein Gleichgewicht statt finden soll?

136. Es sey ABCD (Fig. 13.) ein physisches Rechteck d. i. aus irgend einer schweren Materie bestehend; von diesem werde ein Dreyeck MBD abgeschnitten, und das Trapez ACDM in M an einem Faden aufgehängt; wie weit muß M von A entfernt seyn, wenn CD horizontal bleiben soll?

137. Eine Halbkugel werde in einem Punkt, A, der Peripherie an einem Faden aufgehängt, und es finde sich, daß die verlängerte Richtung des Fadens mit der Grundfläche einen Winkel von 20° 33′ 21″,8 macht; in welchem Abstand vom Mittelpunkt liegt der Schwerpunkt der Halbkugel?

138. Wenn man, um einen Pfahl, AB, (Fig. 15.) oder einen andern ähnlichen Gegenstand, umzureißen, eine Kraft von 50 Zentnern, die von C aus in senkrechter Richtung, EC, wirkte, anwenden müßte — wobey CD = EB = = 12 Fuß, EC = 16 Fuß wäre; in welchem Punkt, H, des Pfahles müßte das Seil, CH, befestigt werden, wenn man mit einer Kraft von 30 Zentnern, in C, eben so viel ausrichten wollte?

139. Wie verhalten sich die Wirkungen einer Kraft aus C (Fig. 15.) auf einen solchen Pfahl, AB, in E und in H, wenn EC senkrecht auf AB und = 12 Fuß; EB = 10, EH = 9 Fuß ist?

140. In welchem Punkt von AB würde die Kraft, unter den angegebenen Bedingungen am stärksten wirken? und wie würde sich die Wirkung daselbst zu der in E verhalten?

141. Wie läßt sich allgemein die Lage des Punktes H (Fig. 15.) finden, in welchem eine Kraft, p, die in einem Abstand CE = a, von dem Pfahl, und in der Entfernung CD = EB = c von dem Boden in der schiefen Richtung, CH, auf den Pfahl wirkt, die größte Wirkung hervorbringt?

142. Wie groß muß das Gewicht seyn, das in C (Fig. 15.) an dem Seil, CH, eben soviel gegen den Pfahl, AB, wirkt, als ein Gewicht von 60 Zentnern in senkrechter Richtung, EC? wenn CD = EB = 8, CE = 12, EH = = 18 Fuß ist.

143. Es befinde sich ein Körper in A (Fig. 17.), der sich nur längs der geraden Linie, AB, bewegen kann. Auf ihn wirke eine anziehende Kraft in der Parallellinie CD, deren Wirksamkeit auf A im einfachen umgekehrten Verhältniß der Entfernung steht; in welchem Punkt, M, wird ihre Wirkung den Körper nach B zu treiben, am größten seyn?

Gleichgewicht flüssiger Körper.

144. Wenn in einem anatomischen Heber der Durchmesser der kurzen Röhre 10 Zoll, der der längern $\frac{1}{2}$ Zoll, und der Unterschied in der Länge beyder 5 Fuß beträgt; wie groß ist der Druck, der gegen die obere Fläche der kurzen Röhre ausgeübt wird, wenn der Heber mit Wasser gefüllt ist, und das Gewicht eines Cubikzolles Wasser = 330,94 Gran Cöln.?

145. Es sey in einem solchen Heber der Durchmesser der weiten Röhre 1 Fuß, der der engen $\frac{3}{4}$ Zoll, und auf die Wassersäule in der engen Röhre drücke, bey gleich hohem

Wasserstand wie in der weiten, ein Gewicht von 25 Pfund; wie groß ist der Druck in der andern Röhre aufwärts?

146. Wenn das Gewicht, das auf die Wassersäule in der engen Röhre wirkt, an dem Ende eines einarmigen Hebels befestigt ist, durch welchen der Druck desselben um das 20fache verstärkt wird; wie groß muß es seyn, wenn der Durchmesser der Röhre $\frac{1}{2}$ Zoll, und der der weitern Röhre 9 Zoll beträgt, und ein Druck von 100000 Pfund aufwärts hervorgebracht werden soll?

147. Was müssen die Durchmesser beyder Röhren für ein Verhältniß gegen einander haben, wenn ein Gewicht von 30 Pfund, an einem Hebel, der die Kraft desselben um das 12fache verstärkt, einen Druck von 36000 Pfund aufwärts hervorbringen soll?

148. Es sey die Grundfläche eines prismatischen Gefäßes 42 Quadratzolle, seine Höhe 8 Zoll; es werde mit Wasser gefüllt; wie viel beträgt der Druck des Wassers gegen den Boden?

149. Ist die Grundfläche dieses Gefäßes ein Rechteck, dessen Seiten 6 und 7 Zoll halten; wie viel beträgt der Druck des Wassers gegen die 4 Seitenwände?

150. Wie groß muß die Seite eines kubischen Gefäßes seyn, in welchem der Druck des Wassers gegen den Boden und die Seitenwände zusammen 94 Pfund 7 Loth $2\frac{3}{4}$ Qu. beträgt?

151. Wie groß muß die Höhe eines prismatischen rechtwinkligen Gefäßes seyn, dessen Grundfläche ein Rechteck von 8 und von 5zolligen Seiten ist, wenn der Druck des Wassers in demselben gegen die 4 Seitenwände 56 Pf. 0 Loth, $2\frac{1}{3}$ Qu. betragen soll?

152. Der Durchmesser eines cylindrischen Gefäßes sey 12 Zoll, seine Höhe 15 Zoll, wie viel beträgt der Druck des Wassers in demselben gegen die krumme Seitenwand?

153. Ein cylindrisches Gefäß von 7 Zoll Höhe erleide, wenn es mit Wasser gefüllt ist, einen Druck gegen den Bo=

den und die Seitenwand = dem Gewicht von $522\frac{1}{4}$ Cubikzoll Wasser = $22\frac{1}{2}$ Pfund; wie groß muß der Durchmesser desselben seyn?

154. In einem vierseitigen Gefäß, von der Form einer umgekehrten abgestumpften Pyramide, sey die untere Grundfläche = 1 Quadratzoll, die obere = 9 Quadratzoll; jede Seitenfläche ein Trapezium, dessen untere Seite = 1 Zoll, obere Seite = 3 Zoll, Abstand beyder von einander = 4 Zoll betrage; es werde mit Wasser gefüllt; wie viel beträgt die Menge desselben? wie viel der Druck desselben gegen den Boden, und wie viel gegen die Seitenwände?

155. Wird ein solches Gefäß von gleicher Gestalt und Größe in umgekehrter Stellung genommen: die größere Grundfläche als Boden, die kleinere aufwärts gekehrt, so bleibt zwar die Wassermenge dieselbe; wie verhält es sich aber mit dem Druck gegen den Boden und die Seitenwände?

156. Bey einem Gefäß von der Form eines abgestumpften umgekehrten Kegels sey der Halbmesser der untern Fläche $1\frac{1}{2}$ Zoll, der Halbmesser der obern $2\frac{1}{2}$ Zoll, der Abstand beyder 8 Zoll; wie viel Wasser faßt es, und wie groß ist der Druck des Wassers gegen den Boden, und gegen die Seitenwand?

157. Wie groß ist der Druck gegen die innere Wand einer hohlen Kugel von 6 Zoll Durchmesser, wenn sie mit Wasser gefüllt ist? und wie verhält er sich zum Gewicht der ganzen Wassermenge?

158. Wie groß ist bey dieser Kugel der Druck auf die Fläche der untern Halbkugel; und wie groß auf die der obern?

159. Wird die hohle Kugel nur zur Hälfte mit Wasser gefüllt, wie groß ist dann der Druck gegen die innere Fläche der Halbkugel, wenn der Durchmesser, wie vorhin, 6 Zoll angenommen wird?

160. Wie groß muß der Durchmesser einer Kugel seyn, bey welcher, wenn sie mit Wasser gefüllt ist, der Druck ge-

gen die innere Fläche dem Gewicht von 1000 Cubikzoll Wasser gleich ist?

161. Wie viel beträgt bey einer hohlen mit Wasser gefüllten Kugel von 10 Zoll Durchmesser der Druck gegen die mittlere Zone von 12 Grad Breite?

162. In einer Kugel, wie die eben angenommene, soll eine Zone bestimmt werden, gegen deren innere Wand ein Druck gleich dem Gewicht von 180 Cubikzoll Wasser ausgeübt wird; wie groß muß die Breite der Zone, oder der Abstand ihrer parallelen Flächen von einander seyn, wenn die untere Fläche einen Zoll vom Mittelpunkt der Kugel absteht?

163. Es sey der Halbmesser einer hohlen Kugel 7 Zoll, die Breite einer Zone in der obern Halbkugel = 2,8699.. Zoll, der Druck gegen die innere Fläche derselben, wenn die Kugel ganz mit Wasser angefüllt ist, gleich dem Gewicht von 450 Cubikzoll; wie groß ist der Abstand der untern Fläche vom Mittelpunkt der Kugel?

164. Es sey der Halbmesser einer hohlen Kugel = r, die Höhe einer Zone derselben = h, der Abstand ihrer untern Fläche vom Mittelpunkt der Kugel = a; wie groß ist der Druck, D, gegen die innere Fläche der Zone, wenn die Kugel ganz mit Wasser gefüllt ist?

Der Druck in Cubikzollen Wasser ausgedrückt.

165. Aus dem Halbmesser der Kugel, r, dem Abstand, a, der untern Fläche einer Zone vom Mittelpunkt, und dem Druck, D, gegen die innere Fläche derselben, die Höhe, h, der Zone zu finden.

166. Wenn bey einer mit Wasser gefüllten Kugel der Halbmesser, r, die Höhe einer Zone, h, und der Druck, D, gegen die innere Fläche derselben gegeben sind, den Abstand, a, der untern Fläche der Zone vom Mittelpunkt der Kugel zu finden.

Verdichtung und Verdünnung elastischer Flüssigkeit.

167. Es sey der Rauminhalt eines Rezipienten einer Compressionspumpe 120 Cubikzoll, der Rauminhalt der Pumpe 8 Cubikzoll; wie viel Kolbenstöße sind erforderlich, um die Luft im Rezipienten auf das Doppelte zu verdichten?

168. Wie stark ist die Verdichtung nach 24 Kolbenstößen?

169. Wie groß muß der Rauminhalt des Rezipienten seyn, wenn 40 Kolbenstöße einer Pumpe, wie die vorige, eine Verdichtung von $3\frac{3}{4}$ mal hervorbringen sollen?

170. Es sey der Rauminhalt des Rezipienten $= V$, der der Pumpe $= v$, die ursprüngliche Dichtigkeit der Luft $= d$; wie groß ist die Dichtigkeit, D, der Luft in dem Rezipiente nach n Kolbenstößen?

171. Enthält der Rezipient schon eine Luft von der Dichtigkeit $= \frac{p}{q} d$, und es kommen noch n Kolbenstöße dazu; wie groß ist alsdann die Verdichtung, D?

172. Der Rezipient einer Luftpumpe halte, nebst den zu ihm führenden Canälen, 300 Cubikzoll; der hohle Raum des Stiefels 25 Cubikzoll; wie viel beträgt die Verdünnung nach 12 Kolbenzügen?

173. Es sey der Rauminhalt des Rezipienten und der zu ihm führenden Canäle $= V$, der des Stiefels $= v$, die anfängliche Dichtigkeit der Luft im Rezipienten $= d$, welches ist die Dichtigkeit d_n nach n Kolbenzügen?

174. Es sey $V = 450$ Cubikzoll, $v = 30$ Cubikzoll, wie viele Kolbenzüge sind erforderlich, um die Luft bis auf $\frac{1}{10}$ ihrer anfänglichen Dichtigkeit zu verdünnen?

175. Welches ist der Grad der Verdünnung, oder, wie groß ist die Dichtigkeit, d_n, der Luft unter dem Rezipienten, nach n Kolbenzügen, bey einer Luftpumpe mit Hähnen, wenn der schädliche Raum dabey berücksichtigt wird?

Gleichgewicht fester und flüssiger Körper.

176. Mit was für einer Kraft sinkt eine eiserne Kugel, die zwey Pfund wiegt, im Wasser zu Boden, wenn das spezifische Gewicht des gegossenen Eisens = 7,207 ist und ein Cubikzoll Wasser 330,94 Gran wiegt? Das spezifische Gewicht des Wassers = 1.

177. Wie viel verliert ein Stück Bley von 5 Pfund im Wasser von seinem Gewicht, wenn das spezifische Gewicht des Bleyes = 11,389 gesetzt wird?

178. Wie viel muß ein Stück Kupfer wiegen, das im Wasser $\frac{1}{4}$ Pfund von seinem Gewicht verliert, und wie groß ist sein Rauminhalt? Das spezifische Gewicht des Kupfers = 8,897.

179. Mit was für einer Kraft wird ein Stück Korkholz von 2 Pfund im Wasser aufwärts getrieben, wenn das spezifische Gewicht desselben = 0,240 ist?

180. Wie tief sinkt ein Stück Tannenholz von 600 Cubikzoll ins Wasser, oder, mit was für einem Theil seines Rauminhalts ragt es über dasselbe empor, wenn sein spezifisches Gewicht = 0,550 ist?

181. Was für ein Gewicht von Bley müßte man mit diesem Tannenholz verbinden, um es im Wasser zum Schweben zu bringen?

182. Wenn ein Bleygewicht von 3 Pfund durch einen Würfel von Tannenholz im Wasser zum Steigen gebracht werden soll, und zwar mit einer Kraft von $\frac{1}{4}$ Pfund; wie groß muß die Seite des Würfels seyn?

183. Was für einen Halbmesser muß eine kupferne hohle Kugel, die $\frac{1}{2}$ Pfund schwer seyn soll, bekommen, um im Wasser zu schweben? Wie groß wird der Halbmesser des hohlen Raumes, und wie dick das Kupfer seyn?

184. Mit was für einer Kraft wird eine sechspfündige Kugel von Eisen, auf Quecksilber gebracht, in die Höhe ge-

trieben, wenn das spezifische Gewicht des Eisens = 7,788; das des Quecksilbers = 13,598 ist?

185. Mit einem Körper A, der spezifisch schwerer als Wasser ist, soll ein spezifisch leichterer, B, so verbunden werden, daß sie im Wasser schweben. Das absolute Gewicht von A sey = P, das spezifische = S; das absolute von B sey = p, das spezifische = s. Es soll der allgemeine Ausdruck für p gesucht werden.

186. Es werde P gesucht aus S, p und s.

187. Es sey statt des Gewichtes P das Volumen, V, des Körpers, A, gegeben, und es werde statt des Gewichtes, p, des Volumen, v, des Körpers, B, gesucht.

188. Es sey P, S und s gegeben, und v soll gesucht werden.

189. Wenn durch die Verbindung der Körper A und B nicht ein Gleichgewicht im Wasser, sondern ein Aufsteigen oder Niedersinken mit einer Kraft = q hervorgebracht werden soll, wie groß muß p oder v seyn, wenn P oder V, nebst S und s gegeben sind?

190. Was für ein Gewicht Bley kann durch 800 Cubikzoll Tannenholz im Wasser zum Aufsteigen mit einer Kraft von $\frac{1}{8}$ Pfund gebracht werden?

191. Eine Metallmasse, deren absolutes Gewicht = P, spezifisches = S ist, soll in Form einer hohlen Kugel im Wasser zum Schweben gebracht werden; wie groß muß der Halbmesser, r, der Kugel, wie groß der Halbmesser, ϱ, des hohlen Raums, und wie dick die Wand der Kugel seyn, wenn das absolute Gewicht des zur Einheit angenommenen Cubikmaaßes Wasser = a ist?

Archimedische Aufgabe.

192. 1 Pfund Zinn verliere im Wasser $1053\frac{1}{2}$ Gran, 1 Pfund Bley $674\frac{1}{3}$ Gran, und 7 Pfund einer Mischung aus Zinn und Bley verlieren 6237 Gran, wie viel Zinn, und wie viel Bley ist in derselben enthalten?

Es wird dabey vorausgesetzt, daß das Volumen eines jeden Metalls sich in der Mischung nicht ändert — was freylich nicht wirklich der Fall ist.

193. 576 Gran Silber verlieren im Wasser 55,25 Gr., 540 Gran Kupfer verlieren 60,69 Gran, eine Mischung aus beyden, von 7920 Gran, verliere 795,11 Gran, wie viel enthält dieselbe von jedem Metall?

---

194. Wenn die Zeit, welche zwischen dem Augenblick, wo man einen Stein in eine Grube fallen läßt, und dem, wo man den Schall hört, den das Aufschlagen desselben auf den Boden verursacht, verstrichen ist, $5\frac{1}{2}$ Secunde beträgt; wie tief ist die Grube?

Die Geschwindigkeit des Schalles betrage 1040 Fuß in 1 Secunde, und der Stein falle in der ersten Secunde durch $15\frac{1}{10}$ Fuß. Der Widerstand der Luft wird nicht berücksichtigt.

195. Die Tiefe einer Grube sey 300 Fuß, wie viel Zeit verstreicht zwischen dem Augenblick, wo man einen Stein hineinfallen läßt, und dem, wo man das Aufschlagen des Steines hört?

---

196. Bis zu welcher Höhe wird sich ein Luftballon, mit brennbarer Luft gefüllt, erheben, wenn sein Volumen 100 Cubikfuß beträgt, ein Cubikfuß atmosphärischer Luft, bey einem Barometerstand von 27 Zoll 6 Lin. = 330 Lin. 2,8 Loth; und ein Cubikfuß brennbarer Luft 0,4 Loth wiegt, und das Gewicht der ihn umgebenden Hülle 5 Pfund ausmacht?

197. Wie groß muß das Volumen eines Luftballons seyn, der 3000 Fuß hoch steigen soll, wenn das Gewicht der atmosphärischen und brennbaren Luft wie bey der vorhergehenden Aufgabe angenommen, das der Hülle und angehängten Last aber = 400 Pfund gesetzt wird?

198. Wie groß kann das Gewicht der Hülle eines Luftballons und der ihm angehängten Last seyn, wenn sein Vo-

lumen 8000 Cubikfuß beträgt, das Gewicht der atmosphärischen und brennbaren Luft wie vorhin angenommen wird, und der Ballon auf 4000 Fuß hoch steigen soll?

Das Licht betreffend.

199. Wenn das Verhältniß der Entfernungen der Planeten von der Sonne ungefähr folgendes ist:

☿	0,4	⚳	2,7
♀	0,7	♃	5,2
♁	1	♄	9,5
♂	1,5	♅	19,2

in welchem Verhältniß werden sie erleuchtet?

200. In welchem Verhältniß werden 2 ebene Flächen von gleicher Größe und in gleicher Entfernung von dem leuchtenden Körper erleuchtet, wenn die Lichtstrahlen auf die eine senkrecht, auf die andere unter einem Winkel von 30 Grad auffallen?

201. Unter welchem Winkel müssen die Strahlen auf eine Fläche fallen, wenn die Erleuchtung nur $\frac{1}{3}$ so stark, als bey senkrechtem Auffallen, in derselben Entfernung seyn soll?

202. Die eine Fläche sey noch einmal so weit von dem leuchtenden Körper entfernt, als die andere, und empfange die Strahlen unter einem Winkel von 36 Grad, während die andere sie unter einem Winkel von 50 Grad erhält; in welchem Verhältniß wird die Erleuchtung beyder stehen?

203. Es sey allgemein das Verhältniß der Entfernungen zweyer Ebenen, A und B, von dem leuchtenden Körper $= m : n$; der Winkel, unter welchem A erleuchtet wird, $= x$, und der Winkel, unter welchem die Strahlen auf B fallen, $= y$; in welchem Verhältniß steht die Erleuchtung derselben?

204. Es sey die Entfernung zweyer Ebenen, A und B, wie 2 : 1, und A unter einem Winkel von 70 Grad erleuchtet; unter welchem Winkel müssen die Strahlen auf B fallen, wenn es noch einmal so stark erleuchtet werden soll, als A?

205. Die Fläche A werde unter einem Winkel von 65

Grad, die Fläche B unter einem Winkel von 50 Grad erleuchtet; in welchem Verhältniß müssen ihre Entfernungen von dem leuchtenden Körper stehen, wenn das Verhältniß ihrer Erleuchtung = 3 : 2 seyn soll?

206. Wie weit erstreckt sich der Schatten eines 80 Fuß hohen Baumes, wenn die Sonne 52 Grad über dem Horizonte steht?

207. Wie tief muß die Sonne am Himmel stehen, wenn der Schatten eines 5 Fuß 4 Zoll großen Menschen 100 Fuß lang seyn soll?

208. Wie weit erstreckt sich der Kernschatten der Erdkugel, wenn der Halbmesser derselben = 1, der der Sonne = $109\frac{1}{4}$, und der Abstand der Mittelpunkte beyder von einander 20,667000 geographische Meilen gesetzt wird?

209. In welchem Abstande muß ein dunkler Körper sich von einem leuchtenden befinden, wenn der Durchmesser von diesem 390mal so groß, als der von jenem ist, und der Kernschatten sich auf 51000 Meilen erstreckt?

210. Es sey der Halbmesser einer leuchtenden Kugel 15 Fuß, der der dunkeln 4 Fuß, der Abstand beyder von einander 72 Fuß; es fragt sich 1) wie weit erstreckt sich der Kernschatten vom Mittelpunkt des dunkeln Körpers? 2) wie groß ist der Halbmesser eines senkrechten Durchschnittes desselben in einem Abstande von 10 Fuß von dem Mittelpunkte des dunkeln Körpers? 3) wie groß ist daselbst der Halbmesser des Halbschattens? und 4) wie groß daselbst die Breite desselben?

211. Es sey der Halbmesser der leuchtenden Kugel = = 25 Fuß, der der dunkeln = 60 Fuß; der Abstand der Mittelpunkte beyder von einander = 180 Fuß; wie groß ist der Halbmesser des Kernschattens in einem Abstand von 150 Fuß von dem Mittelpunkt des dunkeln Körpers, und wie groß daselbst der Halbmesser des Halbschattens?

212. Wie groß muß der Halbmesser des leuchtenden Körpers seyn, wenn der des dunkeln 8 Fuß beträgt, die Mit-

telpunkte beyder 45 Fuß von einander abstehen, und der Kernschatten eine Länge von 30 Fuß hat?

213. Es sey allgemein der Halbmesser des leuchtenden Körpers $= R$, der des dunkeln $= r$, der Abstand der Mittelpunkte beyder $= a$; wie groß ist der Halbmesser, ϱ, des Kernschattens in einem Abstande $= b$ vom Mittelpunkt des dunkeln Körpers? und wie groß der Halbmesser, h, des Halbschattens daselbst?

214. Der dunkle Körper sey eine runde Scheibe, deren Halbmesser $= r$ ist; das Licht komme von einem leuchtenden Punkt, C, dessen senkrechter Abstand vom Mittelpunkt der Scheibe $= a$; der Schattenkegel werde von einer Ebene parallel mit der Scheibe, und in einem Abstande $= b$ von derselben durchschnitten; wie groß ist der Halbmesser, ϱ, des Durchschnittes?

215. Es sey der Halbmesser der Scheibe 3 Zoll; der senkrechte Abstand des leuchtenden Punktes von ihrem Mittelpunkt 6 Zoll, die Scheibe befinde sich 12 Zoll von einer ihr parallelen Wand, wie groß ist der Halbmesser des Schattens an der Wand?

216. Die Scheibe werde um ihren vertikalen Durchmesser, um einen Winkel von 30 Grad, gedreht — daß also die gerade Linie von dem leuchtenden Punkt nach dem Mittelpunkt der Scheibe einen Neigungswinkel von 60 Grad gegen dieselbe hat — was für eine Gestalt bekommt alsdann der Schatten an der Wand?

217. Wenn die Drehung der Scheibe weiter fortgesetzt wird, bis auf einen Winkel von 60°, so daß jetzt der Neigungswinkel, AOC, $= 30^\circ$ ist; wie ändert sich die Gestalt der Ellipse?

218. Die Drehung werde bis auf 80 Grad fortgesetzt; wie groß sind dann die beyden Achsen der Ellipse?

219. Beträgt die Umdrehung volle 90 Grad, wie erscheint alsdann der Schatten?

220. In welche Entfernung muß der leuchtende Punkt

Staatliche Bibliothek
Regensburg

von der Scheibe gebracht werden, wenn der Schatten an der Wand, während der Umdrehung der Scheite, stets kreisförmig bleiben soll? und wie wird es mit der Größe der Schattenkreise bey der verschiedenen Stellung der Scheibe aussehen?

221. Es sey allgemein, wie in 214. der Halbmesser der Scheibe $= r$, der senkrechte Abstand des leuchtenden Punktes vom Mittelpunkt der Scheibe $= a$; der Abstand der Scheibe von der ihr parallelen Wand $= b$; sie werde um ihren vertikalen Durchmesser, um einen Winkel $= u$, gedreht, welches sind die allgemeinen Ausdrücke für die kleine, und für die große Achse des elliptischen Schattens?

222. Was für eine Lage muß eine runde Scheibe gegen den leuchtenden Punkt und gegen die Wand erhalten, wenn der Schatten an der Wand eine Parabel; und was für eine, wenn er eine Hyperbel bilden soll?

So wie kreisförmige Scheiben elliptische Schatten geben können, so können elliptische Scheiben kreisförmige Schatten geben.

223. Es werde eine elliptische Scheibe, deren große Achse $= \alpha$, kleine Achse $= \beta$ sey, an eine vertikale Wand mit einem Scheitelpunkt, unter einem Winkel $= x$, gelehnt, und so daß die kleine Achse, der Wand parallel, gleichfalls vertikal steht; an welche Stelle muß der leuchtende Punkt gebracht werden, damit an der Wand ein kreisförmiger Schatten, dessen Halbmesser $= r$ sey, entstehe?

Statt der runden oder elliptischen Scheiben lassen sich auch kugelförmige oder ellipsoidische Körper anwenden, um Schatten, die einen Kegelschnitt darstellen, an der Wand hervorzubringen. Wenn man eine Kugel oder ein Ellipsoid in einen hohlen Kegel hineinpaßt, so kann man dem Kegel leicht eine solche Stellung geben, daß der Durchschnitt desselben an der Wand einen beliebigen Kegelschnitt darstellt.

224. Es werde eine Kugel, deren Halbmesser $= r$ sey, so aufgehängt, daß der Abstand ihres Mittelpunktes von der

Staatliche Bibliothek Regensburg

Wand = d, von dem leuchtenden Punkte = a, und der Abstand des leuchtenden Punktes von der Wand = b sey, was für eine Figur wird der Schatten an der Wand darstellen?

225. In welcher Entfernung vom Auge muß ein aufrecht stehender Gegenstand von 100 Fuß Höhe sich befinden, um unter einem Winkel von 10 Gr. zu erscheinen?

226. Unter welchem Winkel erscheint ein vertikaler Gegenstand von 480 Fuß in einer Entfernung von 1800 Fuß?

227. Wie groß ist der Durchmesser des Mondes, wenn seine scheinbare Größe in einer Entfernung von 51830 geograph. Meilen 31 Min. 3 Sec. beträgt?

228. Unter welchem Winkel erscheint ein Gegenstand AB (Fig. 31.) von 60 Fuß Länge, der gegen die Ebene MN unter einem Winkel BAN = 30 Gr. geneigt ist, aus dem Standpunkt M, wenn die Entfernung AM 120 Fuß beträgt?

229. Wenn zwey gerade Linien von ungleicher Größe mit ihrem einen Ende an einander stoßen, den Standpunkt in der durch beyde Linien gelegten Ebene zu finden, von welchem aus betrachtet sie unter gleichen Winkeln erscheinen.

230. Ueber der Ebene, MN (Fig. 35.), befinde sich ein Gegenstand, ab; an welcher Stelle der Ebene wird dieser am größten erscheinen?

231. Bey welchem Einfallswinkel geht die Brechung, bey dem Uebergange eines Strahls aus Glas in Luft, in eine Zurückwerfung über, wenn das Brechungsverhältniß zwischen Luft und Glas wie 3 : 2 ist?

232. Wann tritt dieser Fall bey dem Uebergange des Strahls aus Wasser in Luft ein, wo das Brechungsverhältniß wie 3 : 4 ist? und wann bey dem Uebergange aus Glas in Wasser, wo das Brechungsverhältniß 8 : 9 ist?

233. Es sey der brechende Winkel eines Glasprisma's = 40 Gr., der einfallende Strahl mache mit dem Neigungsloth einen Winkel von 50 Gr.; was für einen Winkel macht der ausfahrende Strahl mit dem Neigungsloth auf der andern

Seite? Das Brechungsverhältniß aus Luft in Glas = 3 : 2 gesetzt.

234. Es sey der brechende Winkel des Prisma's 60 Gr.; unter welchem Winkel muß der Strahl auf der einen Seite einfallen, wenn er auf der andern unter einem gleichen Winkel ausfahren soll?

In diesem Fall erscheint der Strahl ungefärbt, weil die Zerstreuung auf der einen Seite durch die auf der andern wieder aufgehoben wird.

235. Es sey der brechende Winkel eines Prisma's = u, der Winkel, unter welchem der Strahl auffällt, = x; der gebrochene Winkel = y; der Einfallswinkel des gebrochenen Strahls an der andern Seite = o; der Austrittswinkel daselbst = z; der Winkel, welchen die Richtung des einfallenden Strahls mit der des ausfahrenden macht, = k und das Brechungsverhältniß aus Luft in Glas = n : 1; man soll die allgemeinen Ausdrücke für diese Winkel angeben.

236. Soll unter derselben Voraussetzung, wie in 235, z = x werden; wie groß muß x seyn?

237. Es sey der brechende Winkel des Prisma's 90 Gr.; was für einen Weg muß der einfallende Strahl nehmen, um ungebrochen durchzugehen?

238. Wenn der Einfallswinkel bey dem rechtwinkligen Prisma 20 Gr. beträgt, was für einen Weg nimmt der Strahl?

239. Es sey bey einer convex-convexen Linse der Halbmesser der einen Fläche = R, der der andern = r; welches ist der allgemeine Ausdruck für die Brennweite, f, derselben? Das Brechungsverhältniß = n : 1 gesetzt.

240. Wie ändern sich die allgemeinen Ausdrücke für die Brennweite oder Zerstreuungsweite, f, der verschiedenen Arten von Hohlgläsern ab?

241. Ein leuchtender Punkt befinde sich in der Achse eines erhabenen Glases, dessen Brennweite = f ist, in einer

Entfernung = b von demselben, wie groß ist die Vereinigungsweite, F?

242. Welches ist der allgemeine Ausdruck für F bey einem Hohlglase?

243. Ein concav-convexes Glas habe eine erhabene Fläche von 6 Zoll Halbmesser; wie groß muß der Halbmesser der hohlen Fläche seyn, wenn die Brennweite des Glases 20 Zoll betragen soll, und das Brechungsverhältniß = 3 : 2 ist?

244. Es sey die Brennweite eines erhabenen Glases = 8 Zoll, ein Gegenstand befinde sich 10 Fuß weit vor demselben; an welcher Stelle hinter dem Glase wird das Bild erscheinen?

245. Es sey die Brennweite eines Glases = 10 Zoll; wie weit muß der Gegenstand vom Glase entfernt seyn, wenn sein Bild 30 Zoll hinter dem Glase erscheinen soll?

246. Die Brennweite eines Glases betrage 9 Zoll; in welcher Entfernung vor demselben muß sich ein Gegenstand befinden, wenn sein Bild hinter demselben 4 mal vergrößert erscheinen soll?

247. An welcher Stelle aber muß sich der Gegenstand befinden, wenn er durch dasselbe Glas gesehen, 4 mal vergrößert erscheinen soll?

248. Die Zerstreuungsweite eines Glases sey = 6 Zoll; in welcher Entfernung erscheint ein Gegenstand, der 18 Zoll entfernt ist, durch dasselbe betrachtet, und wie vielmal verkleinert?

249. Wie muß die Brennweite eines Glases beschaffen seyn, wenn ein Gegenstand, der 3 Zoll von demselben entfernt ist, durch dasselbe betrachtet, noch einmal so groß; und wie, wenn er nur halb so groß erscheinen soll?

250. Mit einem erhabenen Glase von 5 Zoll Brennweite werde ein Hohlglas von 10 Zoll Zerstreuungsweite verbunden, wie groß ist die Brennweite beyder zusammen?

251. Es sey der Halbmesser der vordern Fläche eines erhabenen Glases = R, der der hintern = r, die Dicke des

Glases in der Mitte $= t$; in welchem Abstande von der Mitte der vordern Fläche liegt derjenige Punkt der Achse, durch welchen die Hauptstrahlen gehen? (Vergl. mein Lehrb. der Phys. §. 252.)

252. Zwey Gläser, ein erhabenes und ein hohles, sollen, in einem Abstande von einander $= a$, so gestellt werden, daß ihre Achsen zusammenfallen; zwischen beyde werde ein Gegenstand gebracht; in welcher Entfernung von dem erhabenen Glase muß dieser sich befinden, wenn das Bild des erhabenen Glases sich zu dem des hohlen, an Größe, wie $m : n$ verhalten soll? Die Brennweite des erhabenen Glases $= + f$, die des hohlen $= - f$.

253. Es sey der Halbmesser eines sphärischen Hohlspiegels $= r$, der Abstand eines leuchtenden Punktes in der Achse vom Spiegel $= a$, wie groß ist die Vereinigungsweite, F, für Strahlen, die sehr nahe bey der Achse auffallen?

254. Wie ändert sich der Ausdruck für F 1) wenn a unendlich groß; 2) wenn $a = r$; 3) $a < r$; 4) $a = \frac{1}{2} r$ 5) $a < \frac{1}{2} r$ ist?

255. Es sey die Brennweite eines Hohlspiegels $= 9$ Zoll, der Abstand eines Gegenstandes vom Spiegel in der Achse $=$ 45 Zoll; wie groß ist der Abstand des Bildes vom Spiegel?

256. Die Entfernung eines Gegenstandes vom Spiegel sey $= 100$ Fuß, die des Bildes $= 2\frac{1}{2}$ Fuß; wie groß ist die Brennweite?

257. Die Brennweite eines Spiegels sey 15 Zoll, das Bild erscheine in einem Abstand von 20 Zoll von dem Spiegel; in welcher Entfernung muß sich der Gegenstand befinden?

258. Die Brennweite des Spiegels sey 10 Zoll, der Abstand des Gegenstandes 12 Zoll; in welcher Entfernung, und in welcher Vergrößerung erscheint das Bild?

259. Die Brennweite sey 8 Zoll, der Abstand des Gegenstandes 5 Zoll; in welcher Entfernung, und unter welcher Vergrößerung erscheint das Bild?

260. Es sollen die allgemeinen Ausdrücke für die Ver-

einigungsweite bey dem Hohlspiegel in die bey dem erhabenen verwandelt werden.

261. Es sey der Halbmesser eines erhabenen Spiegels 12 Zoll, man setze die Entfernung des Gegenstandes der Reihe nach 1) unendlich groß, 2) 12 Zoll, 3) 6 Z., 4) 3 Z.; wo erscheint jedesmal das Bild, und in welcher Vergrößerung?

262. In der Achse eines Hohlspiegels von 3 Fuß Brennweite sey ein leuchtender Punkt, in einem Abstande von $4\frac{1}{2}$ Fuß von der Mitte des Spiegels; und in einem Abstande von $7\frac{1}{2}$ Fuß sey ein Planspiegel, unter einem Winkel von 45 Grad gegen die Achse des Hohlspiegels, befindlich; wohin wird das von dem Hohlspiegel zurückgeworfene Bild des leuchtenden Punktes fallen?

263. Ein hohler und ein erhabener Spiegel von gleichen Halbmessern sind mit ihren spiegelnden Flächen so gegen einander gekehrt, daß ihre Achsen zusammenfallen; der Abstand ihrer Oberflächen von einander sey $= a$; in welchen Punkt ihrer gemeinschaftlichen Achse muß ein Gegenstand gestellt werden, wenn die Bilder desselben sich wie $m : n$ verhalten sollen?

264. Und wie weit muß der Gegenstand von dem Hohlspiegel entfernt seyn, wenn, unter denselben Bedingungen wie bey der vorigen Aufgabe, die Bilder gleich groß seyn sollen?

265. Wenn in der Aufgabe (263.) die Halbmesser der Spiegel ungleich angenommen werden; wie ändert sich der Ausdruck für die Stellung des Gegenstandes?

266. Wie viel beträgt, bey einem sphärischen Hohlspiegel, dessen Halbmesser $= r$ ist, die Abweichung wegen der Kugelgestalt, für Strahlen, die parallel mit der Achse, in einem Abstande von u Graden von der Mitte des Spiegels, auffallen?

267. Wie verhält sich bey dem sphärischen Hohlspiegel, unter den bey der vorigen Aufgabe angenommenen Bedin-

gungen, die Längenabweichung zu der Seitenabweichung?

268. Wie viel beträgt die Abweichung wegen der Kugelgestalt bey dem erhabenen sphärischen Spiegel, für Strahlen, die parallel mit der Achse auffallen?

269. Es sey der Halbmesser eines Hohlspiegels = 12 Zoll; wie viel beträgt die Abweichung für Strahlen, die parallel mit der Achse, in einem Abstande von 20 Grad von der Mitte des Spiegels auffallen?

270. In welchem Fall ist die Längenabweichung der Seitenabweichung, sowohl bey dem hohlen, als bey dem erhabenen Spiegel, gleich?

271. Wie erscheint ein Kreisausschnitt, von Papier oder einem andern schicklichen Material, innerhalb eines Winkelspiegels gebracht?

272. Wenn ein ebener Spiegel sich auf einer geraden Linie, die senkrecht auf ihm steht, sich selbst parallel fortbewegt, und vor demselben in der Linie sich ein ruhender Gegenstand befindet; wie ändert sich die Stellung seines Bildes oder wie ist die scheinbare Bewegung desselben beschaffen?

273. Geschieht die Bewegung des Spiegels zwar sich selbst parallel, aber in einer geraden Linie, die gegen die auf den Spiegel senkrecht gehende Richtung geneigt ist; wie verhält es sich dann mit der Bewegung des Bildes?

274. Dreht der Spiegel sich, ohne seine Stelle zu verändern, um einen seiner horizontalen Durchschnitte herum; was beschreibt das Bild eines unbewegt vor dem Spiegel befindlichen Gegenstandes für einen Weg? Und wie ist der Weg des Bildes beschaffen, wenn die Umdrehung des Spiegels um einen vertikalen Durchschnitt geschieht?

Die Wärme betreffend.

275. Wie viel machen 24 Grade Reaum. nach der Fahrenheitischen, und wie viel nach der Centesimal-Scale?

276. Wie viel machen dagegen 24 Gr. Fahr. nach der Reaum., und wie viel nach der Centesimal-Scale?

277. Welches sind die allgemeinen Ausdrücke zur Vergleichung der 3 genannten Thermometer-Scalen?

278. Wenn 3 Pfund Wasser von 15 Grad Reaum. mit 7 Pfund von 60 Grad Reaum. gemischt werden; welche Temperatur bekommt die Mischung?

279. Wenn 3 Pfund Wasser von 15 Grad Reaum. mit 7 Pfund Leinöl von 60 Grad gemischt werden, und die spezifische Wärme des Wassers zu der des Leinöls, wie 2 : 1 ist; welche Temperatur erhält die Mischung?

280. Wenn 5 Pfund Leinöl von 12 Grad Reaum. mit 2 Pfund Wasser gemischt werden, und die Mischung eine Temperatur von 20 Grad erhalten soll; welche Temperatur muß das Wasser haben?

281. Ein Körper A habe eine Masse $= M$, eine spezifische Wärme $= S$, und eine Temperatur $= T$. Ein Körper B habe eine Masse $= m$, eine spezifische Wärme $= s$, eine Temperatur $= t$; beyde werden mit einander vermischt, was für eine Temperatur, x, erhalten sie durch die Mischung?

Es wird vorausgesetzt, daß die Körper keine chemische Wirkung auf einander ausüben, wodurch ihre Temperatur sich ändert.

Gegenstände der angewandten Naturlehre betreffend.

282. Wie weit muß man sich von einem Berge, der 5000 Fuß hoch ist, entfernen, um ihn aus dem Horizont zu verlieren,

1) wenn das Auge sich in der Erdfläche selbst befindet; 2) wenn es 5 Fuß darüber erhaben ist?

Auf die Strahlenbrechung keine Rücksicht genommen.

283. Wenn die Höhe des Aetna's 10000 Par. Fuß beträgt; was für einen Theil desselben wird man noch aus einer Entfernung von 20 Meilen sehen können?

284. Wie viel beträgt der Umfang des Parallelkreises der Erdkugel unter dem 45sten Grad der Breite?

285. Unter welchem Grade der Breite beträgt der Umfang des Parallelkreises m Meilen?

286. Aus den geographischen Längen und Breiten zweyer Oerter auf der Erdkugel ihre Entfernung von einander zu finden.

287. Wie weit ist Madrid von Stockholm entfernt, wenn die Breite von M. 40° 25′ 18″, die Länge 13° 58′ 0″
— — St. 59° 20′ 30″, — — 35° 42′ 30″ ist.

288. Wie weit ist London von Rio Janeiro entfernt, wenn die Breite von L. 51° 30′ 49″, die Länge 17° 34′ 13″
— — R. 22° 54′ 13″, südl. — 334° 22′ 10″.

289. Die Entfernung zweyer Punkte auf der Erdoberfläche zu finden, von welchen der eine im Aequator selbst liegt, der andere eine Breite von 48° 36′ hat, und deren Längen-Unterschied 112° 30′ beträgt.

290. Aus der Schiefe dee Ekliptik, O, der geraden Aufsteigung, A, und der Abweichung, D, eines Gestirns die Breite, B, und Länge, L, desselben zu finden.

291. Es sey die Schiefe der Ekliptik 23° 28′, die gerade Aufsteigung eines Gestirns 58° 53′ 20″; die Abweichung 25° 38′ 41″ nördlich; wie groß ist die Breite und Länge desselben.

292. Es sey Abweichung eines Gestirns 24° 30′ 16″ südlich, die gerade Aufsteigung 233° 48′ 56″; die Schiefe der Ecliptik wie vorhin; wie groß ist die Breite und Länge desselben?

293. Die Größe des halben Tagebogens eines Gestirns zu finden, dessen nördliche Abweichung 35° 36′ beträgt, wenn die Polhöhe des Orts 48° 24′ ist; und Verwandlung des Bogens in Zeit. Die Größe der Strahlenbrechung unberücksichtigt gelassen.

294. Die Dauer des längsten Tages in Neapel, in Paris, und in Petersburg zu finden; wenn die Polhöhe von

Neapel 40° 50′ 15″, von Paris 48° 50′ 14″, von Petersburg 59° 56′ 23″ beträgt, und die Abweichung der Sonne = = 23° 28′ ist.

295. Welche Höhe erreichte die Sonne in Berlin am 1sten May 1840 um Mittag? und welche Höhe um 10 Uhr Vormittag?

Polhöhe von Berlin 52° 30′ 16″.
Abweichung der Sonne 15° 10′ 25″.

296. Wie hoch stand die Sonne in Gotha am 18ten October 1840 Nachmittag um 3 Uhr?

Polhöhe von Gotha 50° 56′ 55″
Abweichung der Sonne 9° 27′ 46″ südlich.

297. Wie weit erstreckt sich der Schatten des Pick's auf Teneriffa am längsten Tage des Morgens um 8 Uhr?

Höhe des Pick's = 11420 Par. Fuß; Polhöhe = 28° 12′ 54″; Abweichung der Sonne 23° 28′.

298. Wie viel beträgt die Morgen- oder Abendweite der Sonne in Gotha am längsten Tage?

299. Den allgemeinen Ausdruck für die Morgen- oder Abendweite, M, eines Gestirns zu finden, wenn die Polhöhe des Orts = P, die Abweichung des Gestirns = $\pm$ D gesetzt wird.

300. In welchem Fall wird die Morgenweite = 90 Grad?

301. Unter welchem Parallelkreise dauert der längste Tag 2 Monate?

302. Den Flächeninhalt der heißen, gemäßigten und kalten Zone der Erdkugel zu finden, wenn die Schiefe der Ekliptik = 23° 28′ gesetzt wird.

303. Wie viel beträgt der Umfang der Erdbahn, wenn ihre mittlere Entfernung von der Sonne = 20,666800 Meilen gesetzt wird?

304. Was für einen Weg legt die Erde in einem Tage, und was für einen in einer Sekunde zurück?

Der siderische Umlauf der Erde = 365 Tage 6 Stunden 9 Minuten 8 Sekunden.

305. Wie verhält sich die Geschwindigkeit der Erdkugel zu der einer abgeschossenen Kanonenkugel, wenn man annimmt, die letztere fliege in der ersten Sek. durch 2000 Fuß?

306. Wenn ein Körper in der Nähe der Erde durch 15,1 Par. Fuß in der 1sten Sekunde fällt, in welcher Entfernung von derselben wird er nur mit einer halb so großen Geschwindigkeit fallen?

307. Durch welchen Raum wird er in einer Entfernung von 1000 Meilen von der Oberfläche der Erde in der ersten Sekunde fallen?

308. Wie tief wird ein Körper in der Nähe des Mondes, nach dem Monde hin, in der ersten Sekunde fallen, wenn die Masse des Mondes 80mal geringer, als die der Erde, und der Halbmesser desselben = 0,2725 von dem Halbmesser der Erde ist?

So giebt Hr. Prof. Hansen diese Verhältnisse an.

309. Wie tief wird er auf der Sonne in der ersten Sekunde fallen, wenn die Masse derselben 337086mal größer, als die der Erde, und ihr Halbmesser 110mal größer, als der der Erde ist?

310. Die Höhe einer Bergspitze über der Meeresfläche; ingleichen den Höhen-Unterschied zweyer Oerter, aus den Barometer- und Thermometer-Ständen daselbst, zu finden.

311. Die Höhe des Montblanc über dem Genfer See zu finden, wenn das Barometer 3 Fuß unter dem Gipfel auf 16 Par. Zoll 0,5 Lin., das Thermometer daselbst auf — 2,5 Reaum. gestanden hat; dagegen an einem 81 Par. Fuß über dem Genfer See erhabenen Standpunkt das Barometer auf 27 Par. Zoll 3,4 Linien, des Thermometer auf 22,6 Grad Reaum. gestanden hat.

312. Die Höhe der Spitze des Bigorre in den Pyrenäen über Tarbes zu finden, wenn das Barometer auf dem Berge

auf 238,15 Lin., das Thermometer am Barometer auf + 7,8 Reaum., in freyer Luft auf + 3,2; in Tarbes das Bar. auf 326,08 Lin., das Thermom. am Bar. auf + 14,9, und in freyer Luft auf 15,3 Reaum. gestanden hat.

313. Die Dauer der Dämmerung für eine gegebene Polhöhe, P, und eine gegebene Abweichung, D, der Sonne zu finden.

314. Die Dauer der Dämmerung, sowohl der astronomischen, als der bürgerlichen, zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche 1) für Rom, dessen Breite = 41° 53′ 54″; 2) für Dresden, dessen Breite = 51° 3′ 37″; 3) für Archangel, dessen Breite = 64° 33′ 36″, zu finden.

315. Unter welchem Parallelkreise dauert die astronomische Dämmerung zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche die ganze Nacht hindurch?

316. Wie lange dauert die astronomische Dämmerung unter dem 51. Grad nördl. Breite und bey 15 Grad nördl. Abweichung der Sonne? und wie lange ebendaselbst bey 15 Grad südlicher Abweichung? ingleichen wie lange die bürgerliche Dämmerung für beyde Fälle?

317. Welcher Parallelkreis macht die Grenze, unter welcher noch die astronomische Dämmerung zur Zeit des längsten Tages die ganze Nacht hindurch dauert?

318. In welcher Entfernung von dem Mittelpunkt der Erdkugel wird ein Körper, der sich zwischen ihr und dem Monde befindet, von beyden Weltkörpern gleich stark angezogen?

Das Verhältniß der Massen derselben wie in 308.

Zweyter Theil.

Auflösung der physikalischen Aufgaben.

---

1. 266 : 135 oder 1 : 0,507.

2. 65 : 203 = 1 : 3,123.

3. 768,30 Gran = 3 Loth 48,30 Gran.

4. $x = \frac{d^3 \pi}{6} mp$. (π die Ludolph-Zahl.)

5. $r = \sqrt[3]{\frac{3x}{4\pi mp}}$. r ist in Zollen auszudrücken, wenn p das Gewicht eines Cubikzolles Wasser bezeichnet; und x ist in derselben Art von Gewicht zu nehmen, in welcher p gilt.

6. r = 0,9160 Zoll.

7. Das Volumen des Cylinders ist $= \frac{1}{4} \cdot \pi 2 = \frac{1}{2} \pi =$ 1,570 ... Cubikzoll; folglich das Gewicht eines Cubikzolles Kupfer $= \frac{19,271}{1,570 \ldots}$ Loth. Folglich giebt die Proportion $\frac{330,94}{240} : \frac{19,271}{1,570} = 1 : x$ das spezifische Gewicht des Kupfers = 8,897.

Hierbey ist die Logarithme von $\frac{1}{2}\pi = 0,1961199$ zu nehmen.

8. Der Theil, welcher im Wasser steckt, ist = 0,16808; und der in der Luft = 0,83192. Denn die Bleykugel verliert im Wasser $\frac{1}{11,35}$ ihres absoluten Gewichtes; die elfen-

beinerne Kugel würde, ganz ins Wasser getaucht, $\frac{1}{1,92}$ ihres Gewichtes verlieren; folglich verliert der Theil derselben, welcher sich eintaucht, und der durch x bezeichnet werde, $\frac{x}{1,92}$ seines absoluten Gewichts. Der andere Theil derselben, $1 - x$, der von Luft umgeben ist, verliert $\frac{(1-x).0,0013}{1,92}$. Soll nun ein Gleichgewicht zwischen beyden Kugeln statt finden, so muß die elfenbeinerne Kugel eben so viel an Gewicht verlieren, als die bleyerne, und man erhält also $\frac{1}{11,35} =$ $= \frac{x}{1,92} + \frac{(1-x).0,0013}{1,92}$; woraus sich

$$x = \frac{1,92 - 11,35 . 0,0013}{11,35\,(1 - 0,0013)} = \frac{1,90524}{11,3352} = 0,16808$$

ergiebt.

9. In diesem Fall erhält man $\frac{1}{8,897} = \frac{x}{0,854} + \frac{(1-x).0,0013}{0,854}$, und hieraus

$$x = \frac{0,854 - 8,897 . 0,0013}{8,897 . 0,9987} = 0,0948..$$

$$1 - x = 0,9052.$$

10. Die Gleichung wird jetzt $\frac{1}{a} = \frac{x}{b} + \frac{(1-x)d}{b}$; und hieraus folgt $x = \frac{b - ad}{a(1-d)}$.

11. Das Gewicht der Kugeln in der Luft sey $= p$; das wahre Gewicht der Platinakugel $= x$; das der wächsernen $= y$. Da die spezifischen Gewichte der Luft und der Platina $= 0,0013 : 22$ sind, so verliert die Platina in der Luft $\frac{0,0013}{22}$ ihres Gewichtes. Es ist also $p = x - \frac{0,0013}{22} x =$

$= \frac{22 - 0{,}0013}{22} x = \frac{21{,}9987}{22} x$ und daher $x = \frac{22}{21{,}9987} p$.
Die spezifischen Gewichte der Luft und des Wachses sind $= 0{,}0013 : 0{,}96$. Das Wachs verliert daher in der Luft $\frac{0{,}0013}{0{,}96}$ seines Gewichts. Folglich ist $p = y - \frac{0{,}0013}{0{,}96} y$ $= \frac{0{,}96 - 0{,}0013}{0{,}96} y = \frac{0{,}9587}{0{,}96} y$; und daher $y = \frac{0{,}96}{0{,}9587} p$.
Also $x : y = 22 . 0{,}9587 : 0{,}96 . 21{,}9987 = 1 : 1{,}0013$.

12. Es sey wiederum das Gewicht der Kugeln in der Luft $= p$; das wahre Gewicht von $A = x$; das von $B = y$; so verliert A von seinem Gewicht x in der Luft $\frac{c}{a} x$; und B von dem seinigen $\frac{c}{b} y$.

Es ist daher 1) $p = x - \frac{c}{a} x = \frac{a - c}{a} x$; und $x = \frac{a}{a - c} p$.

2) $p = y - \frac{c}{b} y = \frac{b - c}{b} y$; und $y = \frac{b}{b - c} p$.

Folglich ist $x : y = \frac{a}{a - c} : \frac{b}{b - c} = a(b - c) : b(a - c)$.

Es ist leicht einzusehen, daß auf die Form der Materien hierbey nichts ankommt: statt der Kugeln könnte man auch Würfel, oder unregelmäßige Klumpen setzen, vorausgesetzt, daß keiner hohle Zwischenräume einschließt.

13. Ist das absolute Gewicht der Kugel $= p$; und der Theil derselben, der sich in das Quecksilber taucht, $= x$, so ist das absolute Gewicht dieses Theils $= px$; und das Gewicht eines gleichen Volumens Quecksilber $= \frac{13{,}6}{7{,}8} px$. Eben so ist das Gewicht des andern Theils der Kugel, der vom Wasser umgeben ist, $= (1 - x) p$; und das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser $= \frac{1}{7{,}8} (1 - x) p$. Man erhält

also $\frac{13,6}{7,8}px + \frac{1}{7,8}p(1-x) = p$; woraus dann leicht gefunden wird $x = \frac{6,8}{12,6} = 0,53968$; $1-x = 0,46032$.

14. Es sey wieder das absolute Gewicht des Körpers $= p$, der gesuchte Theil desselben $= x$, folglich das Gewicht von diesem $= px$, so ist das Gewicht eines gleichen Volumens Quecksilber $= \frac{a}{b}px$. Ferner ist das Gewicht des andern Theils des Körpers $= p(1-x)$, und das Gewicht eines gleichgroßen Volumens Wasser $= \frac{1}{b}p(1-x)$. Man erhält also $\frac{a}{b}px + \frac{1}{b}p(1-x) = p$. Folglich $x = \frac{b-1}{a-1}$; $1-x = \frac{a-b}{a-1}$.

15. Das absolute Gewicht der Kugel sey $= p$, so wiegen $\frac{3}{5}$ derselben $\frac{3}{5}p$. Ein gleiches Volumen Wasser wiegt $\frac{3}{5}\frac{p}{y}$, wenn die spezifischen Gewichte des Wassers und des Holzes $= 1 : y$ sind. Der Theil der Kugel, welcher in die Luft emporragt, wiegt $\frac{2}{5}p$, und das Gewicht eines gleichen Volumens Luft beträgt $\frac{2}{5} \cdot \frac{0,0013}{y}p$. Es ist also $\frac{3}{5}\frac{p}{y} + \frac{2}{5} \cdot \frac{0,0013}{y}p = p$; woraus sich ergiebt $3 + 2 \cdot 0,0013 = 5y$. Folglich $y = \frac{3,0026}{5} = 0,6005$.

---

16. Die Geschwindigkeiten verhalten sich, wie $\frac{10000}{5\frac{1}{2}} : \frac{7800}{3\frac{1}{4}} = 25 : 33$.

17. Es sey die Zahl der Meilen $=x$, so ist $\frac{32}{21}:\frac{x}{10}= =2:3$; Folglich $x=22\frac{6}{7}$.

18. Nimmt man nur die vollen Millionen zur Rechnung, welches für diese Bestimmung hinreichend ist, so ist das Verhältniß der Geschwindigkeiten $\frac{8}{88}:\frac{397}{30688}=\frac{1}{11}:\frac{397}{30688}=30688:4367=7{,}02..:1$. Also ist die Geschwindigkeit des Merkurs etwas mehr, als siebenmal so groß, als die des Uranus.

Die Bahnen der Planeten werden hierbey als kreisförmig angenommen; und da die Peripherieen der Kreise sich wie ihre Halbmesser verhalten, so können die Entfernungen der Planeten statt ihrer durchlaufenden Bahnen selbst zur Rechnung genommen werden.

19. Ist die gesuchte Zeit $=x$, so ist $\frac{72}{50}:\frac{54}{x}=5:4$; woraus sich $x=46\frac{7}{8}$ Stunden findet.

20. Die gesuchte Anzahl der Fuße sey $=x$, so ist — da die durchlaufenen Räume im geraden Verhältniß der Kräfte, und im umgekehrten der Massen stehen —

$$\left.\begin{matrix} 1:3 \\ 240:50 \end{matrix}\right\} = 480:x$$

woraus $x=300$ folgt.

21. Aus demselben Grunde, wie bey der vorhergehenden Aufgabe, erhält man hier

$$\left.\begin{matrix} 4:3 \\ 36:120 \end{matrix}\right\} = 750:x$$

und $x=1875$.

22. Da die Kräfte im geraden Verhältniß sowohl der Massen, als der Räume stehen, so ist

$$\left.\begin{matrix} 24:9 \\ 1500:1200 \end{matrix}\right\} = 1:x$$

woraus sich $x=\frac{3}{10}K$ ergiebt.

23. Die Massen stehen im geraden Verhältniß der Kräfte, und im umgekehrten der Räume; man erhält daher:

$$\left.\begin{array}{r} 7:5 \\ 940:560 \end{array}\right\} = 170:x$$

folglich $x = 72\frac{16}{47}$ Pfund.

24. Die Auflösung der Aufgabe läuft darauf hinaus: aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines Dreyecks die dritte Seite zu finden. Doch ist hier nicht der gegebene Winkel selbst der eingeschlossene, sondern der Nebenwinkel desselben. Wird daher die dritte Seite $= x$ gesetzt, so ist, nach §. 49. 2 meines Lehrbuchs der Physik,

$$x = \sqrt{(450^2 + 320^2 + 2.450.320 \cos 24^0\, 30')} = 752,97...$$

25. Man setze die gesuchte Kraft, durch die Größe einer Linie ausgedrückt, $= a$, so ist nach der, bey der vorhergehenden Aufgabe gegebenen Gleichung

$$1000 = \sqrt{(680^2 + a^2 + 2.a.680.\cos 32^0\, 40')}.$$

Folglich $1000^2 - 680^2 = a^2 + 2.680.\cos 32^0\, 40'.a$ und wird diese quadratische Gleichung ergänzt, so erhält man $a^2 + 2.680.\cos 32^0\, 40' a + (680.\cos 32^0\, 40'.)^2 = 1000^2 - 680^2 + (680.\cos 32^0\, 40')^2 = 1000^2 - 680^2 (1 - \cos^2 32^0\, 40') = 1000^2 - 680^2.\ \mathrm{Sin}^2\, 32^0\, 40' = 1000000 - 134711 = 865299$. Hieraus die Quadratwurzel giebt

$$a + 680.\cos 32^0\, 40' = \sqrt{865299} = 930,21...$$

Ferner ist $680.\cos 32^0\, 40' = 572,44$; folglich

$$a = 930,21 - 572,44 = 357,77.$$

Das Allgemeine dieser Aufgabe ist: aus zwey Seiten eines Dreyecks und einem gegenüberstehenden Winkel die dritte Seite zu finden. Diese läßt sich aus der bekannten Formel (s. mein Lehrb. der reinen Mathem. §. 339.)

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\,\frac{\cos C)}{r}}$$ oder $r = 1$ gesetzt

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos C)}$$

leicht ableiten. Es ist

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

folglich $a^2 - 2ab\cos C = c^2 - b^2$

und $a^2 - 2ab\cos C + b^2(\cos C)^2 = c^2 - b^2 + b^2.$

$\cos C^2 = c^2 - b^2(1 - \cos C^2)$

$= c^2 - b^2(\sin C)^2.$

Hieraus die Quadratwurzel gezogen, giebt

$a - b\cos C = \pm\sqrt{(c^2 - b^2\sin C^2)}$

folglich $a - b.\cos C \pm \sqrt{(c^2 - b^2\sin C^2)}$.

Das doppelte Zeichen vor dem Wurzelzeichen zeigt die beyden möglichen Fälle an, wenn $c < b$ ist. Dagegen gilt nur das obere Zeichen, wenn $c > b$ ist. (Vergl. das vorhin angeführte Lehrbuch der Mathem. §. 64.).

26. Bey dieser Aufgabe sind alle drey Seiten des Dreyecks gegeben, und es soll ein Winkel gefunden werden. Da aber der gesuchte nicht der Winkel des Dreyecks selbst, sondern der Nebenwinkel von diesem ist, und die Cosinus zweyer Nebenwinkel zwar gleich groß, aber entgegengesetzt sind, so wird, wenn man die drey Seiten durch a, b, c, und den gesuchten Winkel durch C bezeichnet,

$\cos C = \frac{c^2 - (a^2 + b^2)}{2ab}$. (S. mein Lehrb. der Math. §. 339).

Hiernach ist also $\cos C = \frac{1200^2 - (750^2 + 600^2)}{2.750.600} = \frac{5175}{9000}$;

und $C = 54^\circ\, 54'$.

27. Man construire einen Rhombus mit einem Winkel von 20°, setze die Diagonale desselben, durch welche der Winkel halbirt wird, $= 300$, und die Seite $= x$. Ein Perpendikel auf die Diagonale aus der Spitze des gegenüberstehenden Winkels, halbirt dieselbe, und man erhält $x.\cos 10 = 150$. Also $x = \frac{150}{\cos 10} = 152,31\ldots.$

28. Die beyden äußern Kräfte allein würden den Körper nach der Richtung der mittlern Kraft treiben. Man berechne also die Wirkung jener, und addire dazu die Größe einer einzelnen Kraft. Wird jede der drey Kräfte $= K$ gesetzt, so ist die Wirkung der beyden äußern $= \sqrt{(2K^2 +}$

$2K^2 \cos 50) = K\sqrt{2(1+\cos 50)} = 2K \cos 25 = 181,26..$ Also die Wirkung aller 3 Kräfte zusammen $= 281,26..$ Fuß.

---

29. Die Tiefe beträgt $(5\frac{1}{2})^2 . 15,095 . = 456,62..$ P. F.

30. Setzt man allgemein den Fall eines Körpers in der 1. Sec. $= g$, und den Raum, durch welchen er in n Sec. fällt $= S$; so ist $S = n^2 g$; folglich der Raum, x, durch welchen er in der n^{ten} Secunde fällt $= n^2 g - (n-1)^2 g = (2n-1)g$. Ist also $n = 6$; und $g = 15,095$, so ist $x = 11 . 15,095 = 166,045$. P. F.

31. Aus $S = n^2 g$, ergiebt sich $n = \sqrt{\frac{S}{g}}$; in diesem Fall also $= \sqrt{\frac{740}{15,095}} = 7,001..$ Sec.

32. Die Geschwindigkeit, welche ein Körper durch den Fall erlangt, läßt sich allgemein auf folgende Art bestimmen: zu dem Fall aus einer Höhe $= S$ braucht er $n = \sqrt{\frac{S}{g}}$ Secunden; und die Geschwindigkeit, die er dadurch erlangt, würde ihn in derselben Zeit durch einen Raum $= 2S$ treiben; folglich in 1 Sec. durch $\frac{2S}{n} = 2S . \sqrt{\frac{g}{S}} = 2\sqrt{(gS)}$. Das ist also in diesem Fall $= 2\sqrt{(2500 . 15,095)} = 100 \sqrt{15,095} = 388,52..$ Par. Fuß.

33. Da der Körper eben so lange steigt, als er fällt, so hat er $8\frac{1}{4}$ Sec. zum Niederfallen gebraucht, und darin einen Raum von 1027,4 Fuß durchlaufen.

34. Um aus einer Höhe von 2000 Fuß herabzufallen, braucht ein Körper 11,51.. Sec.; und da die Zeit des Aufsteigens eben so groß ist, so beträgt die ganze Zeit seines Ausbleibens 23,02 Sec.

35. Mit derselben Geschwindigkeit, mit welcher er beym Herabfallen aus einer gleichen Höhe auf der Erde anlangt; also (nach Aufgabe 32.) mit einer Geschwindigkeit von $2 . \sqrt{(2000 . 15,095)} = 347,5$ Fuß in der ersten Secunde.

36. Aus den vorhergehenden Erläuterungen ergiebt sich, daß $400 = 2\sqrt{(gS)}$, also $S = \frac{40000}{g} = 2649,8\ldots$ Fuß ist.

37. Da ein schief in die Höhe geworfener Körper, ohne den Widerstand der Luft, eine Parabel beschreibt, so muß hier die Theorie dieser Linie berücksichtigt werden. Die gewöhnliche Gleichung für dieselbe ist $y^2 = px$ (s. mein Lehrb. der reinen Math. S. 585). Setzt man aber den Anfang der Abscissen in A (Fig. 1.), nimmt die auf der Achse SC senkrechte Linie $AB = 2a$ zur Abscissenlinie an, und bezeichnet AP durch x; PM durch y, so wird $x = AC - CP = a - MN$; $y = SC - SN$. Es ist ferner $SN : SC = MN^2 : AC^2$ d. i. $(SC - y) : SC = (a - x)^2 : a^2$; folglich auch $SC - (SC - y) : a^2 - (a - x)^2 = SC : a^2$ d. i. $y : (2ax - x^2) = SC : a^2$; woraus folgt $SC = \frac{a^2}{2a - x} \cdot \frac{y}{x}$.

Multiplizirt man in der Proportion das erste und dritte Glied mit dem Parameter, p, so wird $py : (2ax - x^2) = p \cdot SC : a^2$; und da zufolge der obigen Gleichung der Parabel $p \cdot SC = a^2$ ist, so ist auch $py = 2ax - x^2$; folglich $y = \frac{2a - x}{p} x$, welches die Gleichung der Parabel für den angenommenen Punkt A ist.

Hiernach gehört zu jeder Abscisse, x, nur eine Ordinate, y; und für $x = o$ (Null) und $= 2a$, wird $y = o$; hingegen für $x > 2a$, und für ein negatives x wird y negativ und desto größer, je größer x ist. Zwischen den Punkten A und B aber wird y am größten, nämlich $= SC$, wenn $x = a$ ist.

Für eine andere Abscisse, v, aus A, und zugehörige Ordinate z, ist $z = \frac{2a - v}{p} v$. Folglich $y : z = (2a - x) x : (2a - v) v$; und nimmt man hier $v = 2x$, so ergiebt sich leicht $2a = \frac{4y - z}{2y - z} x$.

Diese beyden Gleichungen für SC und für 2a führen zur Auflösung unserer Aufgabe.

Denn gesetzt, ein Körper werde in A (Fig. 2.) schräg in die Höhe geworfen, nach der Richtung AD d. i. unter dem Winkel $DAC = u$ und mit einer Geschwindigkeit $= AD = K$ in einer Secunde, während die Schwere ihn in derselben Zeit durch einen Raum $= Dm = g$ treibt, so beschreibt er in der ersten Secunde den parabolischen Bogen Am, dessen Abscisse $Ap = x$; Ordinate $pm = y$ ist. Es ist aber $Ap = AD . \cos u$; $pm = AD . \sin u - Dm$ d. i. $x = K . \cos u$; $y = K . \sin u - g$. Am Ende der zweyten Secunde befindet sich der Körper an einer Stelle der Parabel, deren Abscisse $v = 2x = 2K \cos u$; Ordinate $z = 2K \sin u - 4g$ ist. Hieraus ergiebt sich die Weite $AB = 2a$, zu welcher der Körper fliegt,
$$= \frac{4K \sin u - 4g - 2K \sin u + 4g}{2K \sin u - 2g - 2K \sin u + 4g} . K \cos u = \frac{2K \sin u}{2g} . K \cos u = \frac{K^2 \sin 2u}{2g}.$$

Die Höhe, zu welcher der Körper steigt, wird durch SC ausgedrückt. Es ist aber, zufolge obiger Proportion,
$$SC = \frac{a^2}{2a - K \cos u} . \frac{K \sin u - g}{K \cos u}.$$ Und setzt man an die Stelle von a den eben gefundenen Werth desselben,
$$\frac{K^2 \sin u . \cos u}{2g}$$ so findet sich ohne große Schwierigkeit
$$SC = \frac{K^2 \sin u^2}{4g}.$$

Nach diesen allgemeinen Ausdrücken ergiebt sich die in der vorliegenden Aufgabe gesuchte
$$\text{Höhe} = \frac{400^2 . \sin 45^2}{4 . 15,1} = \frac{400^2 . \frac{1}{2}}{4 . 15,1} = \frac{400^2}{8 . 15,1} = 1324,9 \ldots$$
und die
$$\text{Weite} = \frac{400^2 . \sin 90}{2 . 15,1} = \frac{400^2}{2 . 15,1} = 5299,7 \ldots \text{ Fuß},$$
wenn 15,1 statt 15,095 gesetzt wird.

Es zeigt sich, daß die Weite viermal so groß, als die

Höhe ist; und dieß ist bey einem Winkel von 45 Graden jedesmal der Fall. Auch lehrt der allgemeine Ausdruck, daß die Weite ein Größtes wird bey einem Winkel von 45 Graden, weil dann $\sin 2u = \sin 90 = 1$; jeder andere Sinus aber < 1 ist, und mit diesem der Quotient $\frac{K^2}{2g}$ multiplizirt werden muß. Die Höhe hingegen wird, wie leicht zu erachten, ein Größtes, wenn $u = 90$ Grad ist.

38. Aus der Formel für die Weite, zu welcher ein schräg in die Höhe geworfener Körper fliegt, bey der vorigen Aufgabe, ergiebt sich $\sin 2u = \frac{2 . 2ag}{K^2}$; also für diese Aufgabe $\sin 2u = \frac{2 . 15,1 - 930}{32400} = \sin 60^0\ 3'\ 42''$. Folglich ist der gesuchte Winkel $= 30^0\ 1'\ 51''$.

39. Die eben angeführte Formel giebt $k = \sqrt{\frac{2a . 2g}{\sin 2u}}$; also in diesem Fall $k = \sqrt{\frac{179 . 2g}{\sin 50}} = 84$ Fuß in einer Secunde.

40. Aus der Formel für die Höhe, zu welcher ein in die Höhe geworfener Körper steigt, ergiebt sich die Geschwindigkeit $K = \sqrt{\frac{4g . 1000}{\sin 72^2}} = 258,39...$ Die Weite, zu welcher er fliegt, beträgt 1300 Fuß.

41. Es sey die Höhe $= h$; alsdann ist $\sin u = \frac{2\sqrt{(gh)}}{K}$. In diesem Fall ist $u = 48^0\ 24'\ 26''$.

42. Um aus einer Höhe von 60 Fuß herabzufallen, braucht der Körper, im freyen Fall, 2 Secunden, wenn er in der ersten Secunde durch 15 Fuß fällt; eben so viel Zeit braucht er auch bey seiner parabolischen Bewegung. Er kommt also 200 Fuß weit von dem Punkt, der senkrecht unter dem Anfangspunkt seiner Bewegung liegt, auf die Erde.

43. Man setze die Anzahl der Secunden, welche B hin-

durch gefallen ist, als A sich ihm auf 100 Fuß genähert hat, $=x$, so ist er in dieser Zeit durch $15,1x^2$ Fuß gefallen; der Körper A ist alsdann schon durch $(4+x)^2 . 15,1$ Fuß gefallen. Man erhält daher die Gleichung $(4+x)^2 . 15,1 = 600 + 15,1\,x^2 - 100 = 500 + 15,1\,x^2$; und hieraus ergiebt sich $x = 258,4 : 120,8 = 2'',139..$ Für den Augenblick des Zusammentreffens ist die Gleichung $(4+x)^2 . 15,1 = 600 + 15,1\,x^2$; und $x = 2'',966..$ A braucht zu seinem gänzlichen Herabfallen $10'',295$, B $8'',139$; folglich langt A $3'',329$; B $5'',173$ nach dem Zusammentreffen auf der Erde an.

44. Es sey wieder die Anzahl der Secunden des Niederfallens von $B = x$, so ist $(6\frac{1}{2}+x)^2 . 15,1 = 1000 + x^2$ $15,1$, und hieraus $x = 1,845...$

45. A braucht zu seinem ganzen Niederfall $T = \sqrt{\frac{h+m}{g}}$ Secunden; in n Secunden fällt er durch n^2g Fuß, und sind dann noch x Secunden erforderlich, damit er sich dem B bis auf d Fuß nähere, so hat er in dieser Zeit $(n+x)^2g$ Fuß durchlaufen. Der Körper B durchläuft in x Secunden x^2g Fuß. Folglich muß $m + x^2g - (n+x)^2g = d$ seyn; also $x = \frac{m-d}{2ng} - \frac{1}{2}n.$

Für $d = o$ wird $x = \frac{m}{2ng} - \frac{1}{2}n$ und dieß ist die Zeit, in welcher der Körper A den Körper B einholt. Sie sey $= x'$, so langt A in $T - (n + x')$ Secunden nach dem Zusammentreffen auf der Erde an.

B braucht zu seinem ganzen Niederfall $\sqrt{\frac{h}{g}} = t$ Secunden; langt also in $t - x'$ Secunden nach dem Zusammentreffen mit A auf der Erde an, das ist, $t - (T - n)$ Secunden später als A.

46. Die Zeit, welche B zu seinem Niederfall braucht, ist $= \sqrt{\frac{400}{15,1}} = 5,147..$ Secunden. A braucht also zu dem

seinigen 10″,147. In dieser Zeit fällt er durch einen Raum von 1554,4 Fuß.

47. Der Körper A braucht zu seinem Niederfall $\sqrt{\frac{1800}{15,1}} = 10'',919$; der Körper B zu dem seinigen $\sqrt{\frac{700}{15,1}} = 6'',809$. Soll A 1 Secunde früher auf der Erde anlangen, als B, so müssen ihm noch 5″,809 zu fallen übrig seyn, wenn B zu fallen anfängt. Folglich ist A schon 5″,110 gefallen, und hat in dieser Zeit 394,16 Fuß zurückgelegt, ehe B zu fallen anfängt.

48. Nach 5 Secunden, und in einer Höhe von 1122,5 Fuß. Denn der Körper B wird in seiner aufwärtsgehenden Bewegung in jeder Secunde um eben so viel Fuß gehemmt, als der Körper A in seinem Fall vorwärts getrieben wird. Wird die Höhe, aus welcher A herabfällt, $= h$, die Geschwindigkeit, mit welcher B emporgetrieben wird, $= K$, und die Anzahl der Secunden, die von dem Anfange ihrer Bewegung bis zum Zusammentreffen verstreicht, $= x$ gesetzt, so ist $x^2g + (Kx - x^2g) = h$ d. i. $Kx = h$; und $x = h : K$.

49. Man ziehe aus zwei Winkelpunkten des Dreyecks nach der Mitte der gegenüberliegenden Seiten gerade Linien; der Durchschnittspunkt dieser beyden Linien ist der gesuchte Schwerpunkt. Denn der Schwerpunkt einer geraden Linie liegt unstreitig in ihrer Mitte. Alle Linien aber, die mit der Seite eines Dreyecks parallel laufen, werden durch die gerade Linie aus der Spitze nach der Mitte der Seite halbirt. Folglich theilt diese Linie das Dreyeck in zwey gleich schwere Theile, und der Schwerpunkt des Dreyecks muß sich in ihr befinden. Dasselbe gilt auch von der zweyten Linie aus der Spitze eines andern Winkels nach der Mitte der gegenüberstehenden Seite. Folglich muß der Schwerpunkt in dem gemeinschaftlichen Punkte beyder Linien, d. i. in ihrem Durchschnittspunkt liegen.

Es ist dieß derselbe Punkt, aus welchem ein Dreyeck

durch die geraden Linien nach den Winkelpunkten in 3 gleiche Dreyecke getheilt wird. S. mein Lehrbuch der reinen Mathem. §. 129.

50. Der Schwerpunkt liegt in dem Durchschnittspunkt beyder Diagonalen; da jede derselben das Parallelogramm in zwey gleiche und ähnliche Theile theilt.

51. Es sey ABCD (Fig. 3.) das Trapezium. Man theile es durch die Diagonale AD in 2 Dreyecke, suche den Schwerpunkt eines jeden derselben, o, p, (49.) und verbinde sie durch eine gerade Linie op. Darauf halbire man AB in E, CD in F und ziehe EF, dann ist der Durchschnittspunkt G der beyden Linien EF und op der gesuchte Schwerpunkt. Denn die gerade Linie EF halbirt alle mit AB parallel laufenden Linien des Trapeziums, und theilt dasselbe in 2 gleich schwere Theile, deren gemeinschaftlicher Schwerpunkt in EF fällt. Ferner muß der Schwerpunkt der beyden Dreyecke ABD und ACD in die gerade Linie fallen, welche ihre beyden Schwerpunkte verbindet, d. i. in op. Also fällt der Schwerpunkt des ganzen Trapeziums sowohl in EF, als in op, d. i. in den Durchschnittspunkte dieser Linien.

52. Ist das Gewicht eines Körpers $= M$, der Theil desselben, womit er von der schiefen Ebene herabgleitet, $= P$; der Druck gegen dieselbe $= Q$, der Neigungswinkel der Ebene $= u$, so ist $P = M. \sin u$; $Q = M. \cos u$. Folglich in diesem Fall $P = 63,39..$ $Q = 135,94..$ Pfund.

53. Aus der Erläuterung zur vorhergehenden Aufgabe folgt: $\sin u = P : M$; also hier $= 200 : 480 = 5 : 12 = \sin 24^0\ 37'\ 27''$.

54. Hier wird M gesucht, und das ist $= Q : \cos u$, also $= 230 : \cos 32 = 271,21..$ Pfund.

55. Der Fallraum auf einer schiefen Ebene verhält sich zu dem Raume im freyen Fall, wie der Sinus des Neigungswinkels zum Sinus totus. Er ist also hier $= (2\frac{1}{2})^2 . 15,1 . \sin 30 = 47,17..$ Fuß.

56. Aus einer Höhe von 240 Fuß fällt der Körper A

im freyen Raum in 3,987.. Secunden herab. In eben dieser Zeit fällt der Körper B auf der schiefen Ebene AC durch die Wirkung der Schwerkraft durch $\frac{240}{AC} \cdot 15{,}1 \cdot (3{,}987)^2$ Fuß herab; hierzu kommt noch die Wirkung des Stoßes $= 90 \cdot 3{,}987$ Fuß. Man erhält also die Gleichung

$$\frac{240}{AC} \cdot 15{,}1 \cdot (3{,}987)^2 + 90 \cdot 3{,}987 = AC$$

und hieraus $AC^2 - 358{,}830\, AC = 57600$.

Dieß ergänzt und die Quadratwurzel ausgezogen, giebt AC um weniges über 479 Fuß.

57. Der Körper A braucht zu seinem Niederfall die Zeit $t = \sqrt{\frac{h}{g}}$. In dieser Zeit fällt B auf der schiefen Ebene durch einen Raum $= \frac{h}{AC} \cdot gt^2 = \frac{h^2}{AC}$. Die Kraft des Stoßes treibt ihn in eben dieser Zeit durch $Kt = K\sqrt{\frac{h}{g}}$. Es ist also

$\frac{h^2}{AC} + K\sqrt{\frac{h}{g}} = AC$. Hieraus ergiebt sich

$$AC = \frac{K\sqrt{h} + \sqrt{(K^2h + 4gh^2)}}{2\sqrt{g}}.$$

58. Auf einer schiefen Ebene, wie die hier bezeichnete, gleitet ein Körper in derselben Zeit, in welcher er im freyen Fall durch 540 Fuß fällt, nur durch $\frac{540}{900} \cdot 540 = 324$ Fuß herab. Die noch übrigen 576 Fuß also muß er vermittelst des ihm ertheilten Stoßes durchlaufen. Setzt man die Geschwindigkeit, die er dadurch erhält, in 1 Sec. $= K$, und erwägt, daß die ganze Zeit des Niederfalls $\sqrt{\frac{540}{15{,}1}}$ Secunden beträgt, so erhält man $\sqrt{\frac{540}{15{,}1}}\, K = 576$; folglich $K = 576 : \sqrt{\frac{540}{15{,}1}} = 567 : 5{,}981.. = 96{,}303..$ Fuß.

59. Dieser ergiebt sich leicht aus der bey No. 57. befindlichen Gleichung $\frac{h^2}{AC} + K \sqrt{\frac{h}{g}} = AC$; nämlich $K = \frac{AC^2 - h^2}{AC} : \sqrt{\frac{h}{g}}$.

60. Die Geschwindigkeit, welche ein auf einer schiefen Ebene herabgleitender Körper am Ende seines Falles erlangt, hängt, wenn er bloß durch die Schwerkraft getrieben wird, nicht von der Länge der Ebene, sondern nur von ihrer Höhe ab, und ist eben so groß, als die Geschwindigkeit, welche er im freyen Fall erlangt haben würde. Denn ist die Länge der Ebene $= l$, ihre Höhe $= h$, so wird der Körper auf ihr in der ersten Secunde durch $\frac{h}{l} g$ getrieben; und ist die Anzahl der Secunden, die er zum gänzlichen Herabgleiten braucht, $= t$, so ist $\frac{h}{l} gt^2 = l$; folglich $t = \frac{l}{\sqrt{(gh)}}$. Er erlangt dadurch eine Geschwindigkeit, die ihn in derselben Zeit noch einmal so weit brächte, also in 1 Secunde durch $2l : t = $ $= 2l : \frac{l}{\sqrt{(gh)}} = 2\sqrt{(gh)}$. Und eben dieses ist die Geschwindigkeit, welche der Körper im freyen Fall erlangt. Mit einer gleichen Geschwindigkeit aber muß er die schiefe Ebene aufwärts getrieben werden; also in diesem Fall mit einer Geschwindigkeit $= 2\sqrt{(60 . 15,1)} = 60,19..$, und die dazu erforderliche Zeit ist $= 4,984..$ Secunden.

Bey schiefen Ebenen von verschiedener Länge, aber gleicher Höhe wird auch eine gleiche Kraft erfordert, um Körper von gleicher Schwere auf ihnen in die Höhe zu bringen. Die Zeiten aber, in welchen der Weg zurückgelegt wird, sind nicht gleich, sondern verhalten sich wie die Längen.

61. Es sey die Geschwindigkeit, welche die Kugel in B in 1 Secunde erhalten soll, $= K$, so wird sie dadurch in 5 Sec. durch 5 K getrieben. In eben dieser Zeit aber wird

sie durch die Gegenwirkung der Schwere $\frac{300}{1000}.15,1.25$ Fuß zurückgedrängt. Man erhält also

$$5K-\frac{300}{1000}.15,1.25=1000;\ \text{d. i.}\ 5K-\frac{3}{10}.15,1.25=1000$$

folglich $K=200+22,65=222,65$.

Wird die Geschwindigkeit, welche die andere Kugel in D erhalten soll, durch K' bezeichnet, so bekommt man die Gleichung

$$5K'-\frac{300}{800}.15,1.25=800;\ \text{und hieraus}\ K'=188,3.$$

62. Die allgemeine Gleichung für die Bewegung des Körpers ist $tK-\frac{h}{l}.g.t^2=l$; woraus sich $K=\frac{l^2+hgt^2}{lt}$ $=\frac{l}{t}+\frac{hgt}{l}$ ergiebt.

63. Die Differenzialrechnung lehrt, daß $BC=AB$; folglich $AC=a\sqrt{2}$ seyn müsse. Es sey z. B. $a=50$ Fuß, so ist $AC=70,710..$ Fuß. In der ersten Secunde würde der Körper auf der schiefen Ebene AC durch 10,677 ... Fuß gleiten, und um bis C zu kommen 2,573 .. Secunden brauchen.

Die hierzu erforderliche Differenzialrechnung läßt sich auf folgende Art führen: Es sey $AC=x$, $AD=y$, und die Zeit, welche der Körper braucht, um auf AC herabzugleiten, $=t$. Zufolge obiger Erläuterung (60.) ist $t=\frac{x}{\sqrt{(gy)}}$; folglich $dt=\frac{\sqrt{(gy)}\,dx-x\sqrt{g}\,\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}dy}{gy}$

$$=\frac{\sqrt{y}\,dx-\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{y}}\,dy}{y\sqrt{g}}=\frac{ydx-\frac{1}{2}xdy}{y\sqrt{(gy)}}.$$

Nun ist $y^2=x^2-a^2$ und daher $dy=\frac{x}{y}\,dx$. Folglich $\frac{dt}{dx}=\frac{y-\frac{1}{2}\frac{xx}{y}}{y\sqrt{(gy}}=\frac{y^2-\frac{1}{2}x^2}{y^2\sqrt{(gy)}}$.

Soll dieser Ausdruck Null werden, so ist $y^2=\frac{1}{2}x^2$; und $x^2=2y^2$; also ABCD ein Quadrat; $y=a$, und $x=a\sqrt{2}$.

64. Es sey der Neigungswinkel der Röhre gegen die Horizontalfläche $=u$, so ist die Kraft, mit welcher die Kugel auf der schiefen Ebene, AB, durch die Schwere herab-

getrieben wird, $= g \sin u$ in der ersten Secunde; und sie erlangt dadurch eine Geschwindigkeit $= 2g \sin u$ in 1 Sec. in der Richtung von M nach B. Diese muß durch eine gleiche Geschwindigkeit in der Richtung von M nach A aufgehoben werden. Bey der Umdrehung der Röhre beschreibt die Kugel einen Kreis, dessen Halbmesser $OM = BN = h . \cot u$ ist, wenn $MN = h$ gesetzt wird; folglich ist die Peripherie desselben $= 2h\pi \cot u$; und braucht die Kugel, um diese zu durchlaufen, x Secunden, so verhält sich die Geschwindigkeit, welche ihr die Schwere ertheilt, zu der, welche sie durch den Umschwung erhält, wie $2g \sin u : \frac{2h\pi \cot u}{x}$. Allein die letztere wirkt nicht der erstern gerade entgegen. Indessen läßt sich die Fliehkraft der Kugel, die durch MS ausgedrückt werde, in MG, senkrecht auf AB, und in MQ, mit MA zusammen fallend, zerlegen; und dieser letztere Theil ist es, welcher der Bewegung der Kugel durch die Schwere entgegen wirkt. Es ist aber $MS : MQ = 1 : \cos u$, und folglich die Geschwindigkeit, mit welcher die Fliehkraft dem Herabgleiten der Kugel entgegen wirkt $= \frac{2h\pi \cot u . \cos u}{x}$. Soll also die Kugel verhindert werden herabzugleiten, so muß $\frac{2h\pi \cot u . \cos u}{x} = 2g \sin u$ seyn. Hieraus ergiebt sich $x = \frac{\pi h.}{g} . \cot u^2$. ($\pi$ die Ludolph. Zahl). Für die in der Aufgabe angegebenen Zahlen ist $x = 2{,}497..$ Sec. Die Geschwindigkeit, welche die Kugel durch das Herabgleiten in 1 Sec. erlangen würde, wäre 21,347.. Fuß; und eben so groß ist die Geschwindigkeit, mit welcher die Fliehkraft, die selbst 30,19.. Fuß beträgt, dem Herabgleiten entgegenwirkt.

65. Aus der vorstehenden Gleichung für x (64.) ergiebt sich $\cot u = \sqrt{\frac{gx}{\pi h}}$. Hiernach ist u im vorliegenden Fall $= 54^0\ 23'$.

66. Aus der nämlichen Gleichung folgt $h = \frac{gx}{\pi \cot u^2}$ d. i. $\frac{3g}{\pi . \cot 60^2} = 43,244..$ Fuß.

67. Da die Pendellängen sich wie die Quadrate der Schwingungszeiten verhalten, so ist das gesuchte Pendel $\frac{1}{4}$mal so lang, als das Secundenpendel, d. i. 110,173 P. Lin. = 9 Zoll 2,173 Lin.

68. Die Anzahl der Schwingungen verhält sich umgekehrt wie die Dauer derselben, folglich umgekehrt wie die Quadratwurzeln der Pendellängen. In diesem Fall also $\sqrt{72} : \sqrt{440,693} = 1 : x$ d. i. $x = 2,474$, also beynahe $2\frac{1}{2}$ Schwingungen in 1 Sec.

69. Wie 49:9 d. i. das eine ist $5\frac{4}{9}$mal so lang, als das andere.

70. Wie $\sqrt{8} : \sqrt{5} = 2,828 : 2,236 = 1264 : 1000$.

71. Da die Unterschiede der Längen des Secundenpendels sich sehr nahe wie die Quadrate der Sinus der Breiten verhalten (s. meine mathemat. Geographie 2te Aufl. S. 182.), so hat man die Proportion $\sin 45^2 : \sin 90^2 = 1,107 : x$, wodurch sich $x = 2,214$ findet; folglich die Länge des Secundenpendels unter dem Pol = 441,531, welches nur um 0,074 Lin. zu klein ist.

72. Ist die gesuchte Geschwindigkeit = x, so muß $12x = 9 . 250 = 2250$ seyn; folglich $x = 187\frac{1}{2}$ Fuß in 1 Sec.

73. Mit einer Geschwindigkeit $= \frac{130 . 24 - 80 . 15}{24 + 15} = 49\frac{3}{13}$ Fuß in der Richtung von B.

74. Es sey die gesuchte Geschwindigkeit = x, so muß $\frac{65 . 100 - 40x}{105} = 50$ seyn; woraus sich $x = 31\frac{1}{4}$ Fuß ergiebt.

75. Das Gewicht des Körpers A sey = x; das von B = y, so ist 1) $x + y = 160$; 2) $\frac{75x - 45y}{160} = 20$. Die

zweyte Gleichung reduzirt sich leicht auf $15x - 9y = 640$; und giebt $y = \frac{15x - 640}{9}$. Die erste giebt $y = 160 - x$. Aus beyden findet sich dann $x = 86\frac{2}{3}$; und hieraus $y = 73\frac{1}{3}$.

76. Das Gewicht von A sey $= x$, das von $B = y$; B durchlaufe in 1 Sec. m Fuß, A 3m Fuß; so ist 1) $x + y = 560$; 2) $3m - m = 60$; folglich $m = 30$; $3m = 90$. Ferner ist 3) $\frac{90x - 30y}{560} = 40$, und hieraus $9x - 3y = 2240$. Aus dieser Gleichung unter Nr. 1. findet sich dann ohne Schwierigkeit $x = 326\frac{2}{3}$, und $y = 233\frac{1}{3}$.

77. Die gesuchte Geschwindigkeit ist $\frac{48.50 + 72.80}{120} = 68$ Fuß.

78. Es sey x die Geschwindigkeit von B, so ist $\frac{2\frac{1}{2}x.130 + 80x}{210} = 54$; woraus sich $x = 28$, folglich die Geschwindigkeit von $A = 70$ Fuß in 1 Sec. ergiebt.

79. Die Linien AD und BD (Fig. 8.) drücken die Richtung der Kugeln und das Verhältniß ihrer Geschwindigkeiten aus. Man zerlege jede derselben in eine Richtung senkrecht auf CD, und in eine parallel mit CD, d. i. AD in AE und AF; BD in BE und BG, und vollende die Parallelogramme AFDE und BGDE.

Die aus der Richtung nach AE und BE entstehenden Wirkungen heben einander auf, da sie einander gleich und entgegengesetzt sind. Es bleiben also nur noch die Wirkungen nach AF und BG übrig; und diese sind $= AD . \cos ADE = 100 . \cos 24 = 91{,}35 \ldots$ Fuß. Mit dieser Geschwindigkeit gehen beyde Kugeln neben einander in der Richtung AF und BG fort.

80. Es stelle wiederum AD (Fig. 9.) die Bewegung der Kugel A, BH die der Kugel B vor; man zerlege jene in AE, senkrecht auf die Berührungsebene CD, und in AF pa=

rallel mit derselben; und eben so diese in BE und BG. Alsdann ist $AE = AD \,.\, \sin x = 80 \,.\, \sin 18 = 24{,}721 \ldots$ und $BE = BH \,.\, \sin y = 50 \,.\, \sin 35 = 28{,}678 \ldots$ Fuß. Die Kraft, mit welcher A gegen B wirkt, ist $= 5 \,.\, 24{,}721 = 123{,}605$; und die, mit welcher B gegen A wirkt, $= 3 \,.\, 28{,}678 = 86{,}034$. Aus beyden entsteht eine Bewegung $= \frac{123{,}605 - 86{,}034}{8}$

$= \frac{37{,}571}{8} = 4{,}696$ Fuß in der Richtung von AE.

Der andere Theil der Bewegung von A, nämlich AF ist $= AD \,.\, \cos x = 80 \,.\, \cos 18. = 76{,}080$; und der von B nämlich $BG = BH \,.\, \cos y. = 50 \,.\, \mathrm{Cos}\, 35 = 40{,}955$ Fuß.

Die Kugel A wird also von den zwey, einen rechten Winkel einschließenden Kräften 4,696 und 76,080 getrieben, woraus eine Geschwindigkeit von 76,2 Fuß in 1 Sec. unter einem Winkel von $3^0\, 31'\, 55''$ gegen CD entsteht. Eben so erhält B durch die rechtwinkligen Kräfte 4,696 und 40,955 eine Geschwindigkeit von 41,2 Fuß, unter einem Winkel von $6^0\, 32'\, 28''$ abwärts von CD.

81. Zerlegt man die Bewegungen beyder Kugeln in eine senkrecht gegen die Berührungsebene, und in eine parallel mit derselben, so zerfällt die Bewegung von A in $G \sin x$ und $G \cos x$; die von B in $g \sin y$ und $g \cos y$. Aus den senkrechten Bewegungen beyder entsteht durch das Zusammenstoßen die Bewegung $MG \sin x - mg \sin y$; und die gemeinschaftliche Geschwindigkeit $C = \frac{MG \sin x - mg \sin y}{M + m}$ nach der Richtung von AE. Alsdann entspringt für die Kugel A aus C und $G \cos x$ die zusammengesetzte Bewegung $D = \sqrt{(C^2 + G^2 \cos x^2)}$; und für B die zusammengesetzte Bewegung $d = \sqrt{(C^2 + g^2 \cos y^2)}$. Der Winkel, unter welchem A sich dabey gegen die Berührungsebene CD bewegt, sey z, so ist $\tan z = \frac{C}{G \cos x}$; und eben so ist

$\tang u = \frac{C}{g \cos y}$, wenn u den Winkel bedeutet, unter welchem B fortgeht, und zwar abwärts von CD.

Ist $m g \sin y > M G \sin x$, so wird C negativ d. h. die Bewegung von A nach dem Zusammenstoßen geht abwärts von der Berührungsebene, und die von B gegen dieselbe hin.

82. Alsdann ist $C = \frac{1}{2}(G \sin x - g \sin y)$. Es verschwindet also M gänzlich d. h. die Größe der Masse kommt dann nicht weiter in Betrachtung, und es ist gleichgültig, ob sie groß oder klein ist. A geht mit einer Geschwindigkeit von 108,9 Fuß in 1 Sec. unter einem Winkel von $3^0\ 20'\ 42''$ gegen die Berührungsebene; B mit einer Geschwindigkeit von 66,1 Fuß unter einem Winkel von $5^0\ 31'$ von der Berührungsebene abwärts.

83. In diesem Fall ist $g = 0$ zu setzen. Es ist daher

$$C = \frac{MG \sin x}{M + m} = \frac{12 . 60 . \sin 20}{16} = 45 . \sin 20 = 15{,}390.$$

Ferner ist $G \cos x = 60 . \cos 20 = 56{,}379$; $\tang z = \frac{15{,}390}{56{,}379}$ $= \tang 15^0\ 16'$; D ist $= \surd(C^2 + G^2 \cos x^2) = 58{,}4$. d hingegen $= \surd(C^2 + 0) = C = 15{,}390$. Die Kugel A geht also mit einer Geschwindigkeit von 58,4 Fuß, unter einem Winkel von $15^0\ 16'$ gegen die Berührungsebene fort; und B mit einer Geschwindigkeit von 15,390.. Fuß in 1 Secunde senkrecht von der Berührungsebene abwärts.

84. Wird in dem Ausdruck für C (83.) $m = M$ gesetzt, so ist $C = \frac{1}{2} G \sin x$; $D = \surd(\frac{1}{4} G^2 \sin x^2 + G^2 \cos x^2)$ $= \frac{1}{2} G \surd(\sin x^2 + 4 \cos x^2) = \frac{1}{2} G \surd(4 - 3 \sin x^2)$. Hiernach ist $C = 32 \sin 28 = 15{,}023$.. und das ist die Geschwindigkeit, welche B senkrecht von der Berührungsebene abwärts erhält. Die Bewegung von A ist 58,454 Fuß unter einem Winkel von $14^0\ 53'\ 16''$ gegen die Berührungsebene.

85. Soll B nach dem Stoße ruhen, so muß seine Bewegung durch den Theil der Bewegung von A, welcher senkrecht gegen die Berührungsebene geht, aufgehoben werden.

Zerlegt man aber die Bewegung von A, so ist dieser Theil $= 6 . 60 . \sin 25 = 152{,}142$. Die Geschwindigkeit von B muß also $= 152{,}142 : 6 = 25{,}357$ seyn. Die Geschwindigkeit von A nach dem Stoß ist $= 60 . \cos 25 = 54{,}378$.. Fuß in 1 Sec. und die Richtung seiner Bewegung parallel mit der Berührungsebene.

86. Ist die gesuchte Geschwindigkeit $= G$, so ist nach 84. $\frac{1}{2} G \sin 21 = 15$; woraus sich $G = 83{,}712$.. Fuß in 1 Secunde findet. Nach dem Stoß ist die Geschwindigkeit von $A = 79{,}5$ Fuß in 1 Sec. und die Richtung der Bewegung $10^0\ 51'\ 54''$.

87. Es sey der gesuchte Winkel $= y$, und sollen beyde Körper nach dem Stoße der Berührungsebene parallel fortgehen, so müssen die senkrecht gegen einander gerichteten Theile ihrer Bewegung einander aufheben d. h. es muß $2 M 45 \sin 20 = M . 60 . \sin y$ seyn; woraus $\sin y = \frac{3}{2} \sin 20$, und $y = 30^0\ 52'$ bey gleicher Richtung; $149^0\ 8'$ bey entgegengesetzter folgt. Die Geschwindigkeit von A ist $= 45 . \cos 20^0 . = 42{,}28$; die von $B = 60 . \cos 30^0\ 52' = 51{,}50$ Fuß.

88. Es sey der gesuchte Winkel $= x$, so ist die Kraft, mit welcher A gegen B wirkt, $= 3 . 50 . \sin x$, und die daraus für B entstehende Geschwindigkeit $= \frac{3 . 50 . \sin x}{5} = 30 \sin x$. Da diese $= 10$ seyn soll, so ist $\sin x = \frac{10}{30}$; und $x = 19^0\ 28'\ 16''$. Die Geschwindigkeit, mit welcher A fortgeht, ist $= \sqrt{(50^2 \cos x^2 + 100)} = 48{,}1$.. Fuß, und der Winkel $= 11^0\ 58'\ 36''$, da die Tangente desselben $= \frac{10}{50 . \cos x}$ ist.

89. Es sey die Geschwindigkeit von A vor dem Stoße $= G$, und der Winkel gegen die Berührungsebene $= x$, so ist $\frac{1}{2} G \sin x = 16$ oder $G \sin x = 32$. Ferner ist die Geschwindigkeit von A nach dem Stoß $= \sqrt{(G^2 \cos x^2 + 256)} = 60$;

folglich $G^2 \cos x^2 = 3600 - 256 = 3344$. Addirt man hierzu $G^2 \sin x^2 = 1024$, so erhält man $G^2(\sin x^2 + \cos x^2)$ d. i. $G^2 = 4368$; und $G = 66,09$.. Fuß. Ferner ist $\sin x = \frac{32}{66,09}$; und $x = 28^0\ 57'\ 32''$. Der Winkel, welchen die Bewegung von A nach dem Stoße mit der Berührungsebene macht, wird durch den Sinus $= \frac{16}{60} = \frac{4}{15}$ gefunden, und ist $= 15^0\ 27'\ 57''$.

90. Es sey das Gewicht von $B = m$, so soll $\frac{120 \sin 18 - m . 24 \sin 12}{4 + m} = 8$ seyn. Folglich ist $120 \sin 18 - m . 24 \sin 12 = 32 + 8m$ oder $15 \sin 18 - 3m \sin 12 = 4 + m$; und hieraus $m = \frac{15 \sin 18 - 4}{3 \sin 12 + 1} = \frac{0,6352}{1,6237} = \frac{2}{5}$ Pfund sehr nahe. Die Geschwindigkeit von A nach dem Stoß ist $= \sqrt{((30 \cos 18)^2 + 64)} = \sqrt{878,05} = 29,63$.. Fuß, und der Winkel $= 15^0\ 40'$; die Geschwindigkeit von $B = \sqrt{((24 . \cos 12)^2 + 64)} = \sqrt{615,1} = 24,8$ Fuß, und der Winkel $= 18^0\ 49'$.

91. Man bezeichne wieder durch x und y die Winkel, unter welchen A und B vor dem Stoß gegen die Berührungsebene gehen, und durch C die aus der Zerlegung der Bewegungen beyder Körper senkrecht gegen die Ebene durch den Stoß hervorgebrachte Geschwindigkeit, so ist $C = \frac{50 \sin x - 50 \sin y}{2} = 25(\sin x - \sin y)$. Dem andern Theil der Bewegung, welcher der Ebene als parallel laufend anzusehen ist, kommt bey dem Körper A die Geschwindigkeit $50 \cos x$, und bey dem Körper B $50 \cos y$ zu. Alsdann ist die Geschwindigkeit von A nach dem Stoß $= \sqrt{(C^2 + (50 \cos x)^2)} = 40$; und die von B $\sqrt{(C^2 + (50 \cos y)^2)} = 36$. Aus diesen 3 Gleichungen hat man zuerst x und y zu suchen. Es ist also

1) $C = 25 (\sin x - \sin y)$

2) $C^2+(50\cos x)^2=1600$; also $C=\sqrt{(1600-(50\cos x)^2)}$
$=10\sqrt{(16-25\cos x^2)}$

3) $C^2+(50\cos y)^2=1296$, also $C^2=1296-(50\cos y)^2$.
Aus 2. u. 3. folgt $1600-2500\cos x^2=1296-2500\cos y^2$
und hieraus

4) $\frac{304}{2500}=\cos x^2-\cos y^2$; und $-\frac{304}{2500}=\sin x^2-\sin y^2$

Aus 1. und 2. folgt 5) $\sin x-\sin y=\frac{10\sqrt{(16-25\cos x^2)}}{25}$
$=\frac{2\sqrt{(16-25\cos x^2)}}{5}$

Dividirt man Nr. 4 durch Nr. 5, so erhält man 6) $\sin x+\sin y=$
$-\frac{304}{2500}\cdot\frac{5}{2\sqrt{(16-25\cos x^2)}}=-\frac{152}{500\sqrt{(16-25\cos x^2)}}=$
$-\frac{38}{125\sqrt{(16-25\cos x^2}}$.

Nr. 5 und 6. addirt giebt $2\sin x=\frac{2\sqrt{(16-25\cos x^2)}}{5}$
$-\frac{38}{125\sqrt{(16-25\cos x^2)}}$

folglich

7) $\sin x=\frac{\sqrt{(16-25\cos x^2)}}{5}-\frac{19}{125\sqrt{(16-25\cos x^2)}}$

ferner

8) $\sin x^2=\frac{16-25\cos x^2}{25}-\frac{38}{625}+\frac{361}{15625(16-25\cos x^2)}$

9) $25\sin x^2=16-25\cos x^2-\frac{38}{25}+\frac{361}{625(16-25\cos x^2)}$

10) $25(\sin x^2+\cos x^2)-16+\frac{38}{25}=\frac{361}{625(16-25\cos x^2)}$

d. i.

11) $25-16+\frac{38}{25}=\frac{263}{25}=\frac{361}{625(16-25\cos x^2)}$

12) $263=\frac{361}{25(16-25\cos x^2)}=\frac{361}{400-625\cos x^2}$

und hieraus

$$13)\ \cos x^2 = \frac{263 \cdot 400 - 361}{263 \cdot 625} = \frac{104839}{164375}.$$

$$14)\ 1 - \cos x^2 = \sin x^2 = 1 - \frac{104839}{164375} = \frac{59536}{164375}$$

$$15)\ \sin x = \sqrt{\frac{59536}{164375}} = \frac{244}{25\sqrt{263}}.$$

Dieß giebt $x = 37^0\ 0'\ 3''$.

Der Sinus von y läßt sich entweder durch eine ähnliche Rechnung aus obigen Gleichungen Nr. 1. 2. und 3. oder aus Nr. 4. und 13. finden.

Man findet $\sin y = \frac{282}{25\sqrt{263}}$; und $y = 44^0\ 4'\ 17''$.

Die oben durch C bezeichnete Geschwindigkeit wird hier negativ, zum Zeichen, daß durch das Zusammenstoßen der Körper nicht eine Bewegung in der Richtung von AB, sondern umgekehrt in der Richtung von BA entsteht. Sie ist $= - 2{,}3419..$ Fuß.

Der Winkel, welchen die Richtung von A nach dem Stoße gegen die Berührungsebene macht, und der oben durch z bezeichnet ist, wird durch $\tan z = \frac{C}{50 \cos x}$ gefunden; und da die Tangente negativ ist, so ist der dazu gehörige Winkel der stumpfe von beyden Nebenwinkeln, nämlich $176^0\ 38'\ 37''$.

Eben so ist auch die Tangente des Winkels, welcher die Bewegung von B nach dem Stoße mit der Berührungsebene macht, negativ, und $= \frac{C}{50 \cos y}$; und der Winkel selbst $= 176^0\ 16'\ 12''$.

Der Körper A geht nach dem Stoß von der Berührungsebene zurück, der Richtung seiner Bewegung vor dem Stoße entgegen; B behält seine Bewegung gegen die Ebene bey, und ändert nur den Winkel gegen dieselbe.

92. Diese Aufgabe ist der vorigen ähnlich, und nur dadurch verschieden, daß die Massen und Geschwindigkeiten beyder Körper vor dem Stoß ungleich sind. Die Auflösung wird dadurch etwas weitläuftiger. Es habe x, y, C wieder dieselbe Bedeutung, wie bey der vorigen Aufgabe, so ist hier

1) $C = \frac{7.40 \sin x - 3.24 \sin y}{10} = \frac{280 \sin x - 72 \sin y}{10}$

2) $C^2 + 1600 \cos x^2 = 1024$; 3) $C^2 + 576 \cos y^2 = 400$. Aus 2. und 3. folgt 4) $624 = 1600 \cos x^2 - 576 \cos y^2$ und durch 16 dividirt $39 = 100 \cos x^2 - 36 \cos y^2$; folglich 5) $\cos y^2 = \frac{100 \cos x^2 - 39}{36}$; und $1 - \cos y^2$ $= \sin y^2 = 1 - \frac{100 \cos x^2 - 39}{36} = \frac{75 - 100 \cos x^2}{36}$; also 6) $\sin y = \frac{5 \sqrt{(3 - 4 \cos x^2)}}{6}$.

Aus Nr. 1. und 2. ergiebt sich $280 \sin x - 72 \sin y = 80 \sqrt{(16 - 25 \cos x^2)}$ und mit 8 dividirt 7) $35 \sin x - 9 \sin y = 10 \sqrt{(16 - 25 \cos x^2)}$; ferner aus Nr. 6. und 7.

$$\frac{5 \sqrt{(3 - 4 \cos x^2)}}{2} = \frac{35 \sin x - 10 \sqrt{(16 - 25 \cos x^2)}}{3}$$

ingleichen $15 \sqrt{(3 - 4 \cos x^2)} = 70 \sin x - 20 \sqrt{(16 - 25 \cos x^2)}$. Dieses auf beyden Seiten quadrirt, statt $\sin x^2$ $1 - \cos x^2$ gesetzt, und gehörig gegen einander gehoben und reduzirt, giebt

$$\frac{425}{112} - 5 \cos x^2 = \sin x \sqrt{(16 - 25 \cos x^2)}.$$

Wird dieses von neuem quadrirt und statt $\sin x^2$ wieder $1 - \cos x^2$ gesetzt, so erhält man zwar auf beyden Seiten $\cos x^4$, es hebt sich aber gegenseitig auf, und man erhält nach gehöriger Redukzion

$$\cos x^2 = \frac{2231}{4256}; \quad \sin x^2 = 1 - \frac{2231}{4256} = \frac{2025}{4256};$$

$$\sin x = \sqrt{\frac{2025}{4256}} = \frac{45}{4 \sqrt{266}}; \quad \text{und} \quad x = 43^\circ\ 36'\ 46''.$$

Alsdann findet sich aus Nr. 6. und dem Werth von $\cos x^2$

$$\sin y = \tfrac{5}{6}\sqrt{\left(3-4.\frac{2231}{4256}\right)} = \tfrac{5}{6}\sqrt{\frac{961}{1064}} = \tfrac{5}{6}.\frac{31}{2\sqrt{266}} =$$

$$= \frac{155}{12\sqrt{266}};$$ und $y = 52^0\ 22'\ 12''$.

Ferner ist $\tan z = \frac{C}{40 \cos x} = \frac{8\sqrt{(16-25\cos x^2)}}{40 \cos x} =$

$$= \frac{\sqrt{\left(16-25\frac{2231}{4256}\right)}}{5\sqrt{\frac{2231}{4256}}} = \tfrac{1}{5}\sqrt{\frac{12321}{2231}};$$ und $z = 25^0\ 10'\ 25''$.

Eben so ist $\tan u = \frac{C}{24 \cos y} = \frac{\sqrt{(16-25\cos x^2)}}{3\cos y} =$

$$= 2.\frac{\sqrt{12321}}{100\cos x^2 - 39} = 2\sqrt{\frac{12321}{57116}};$$ und $u. = 42^0$ $53'\ 21''$.

93. Aus den Erläuterungen zu den vorhergehenden Aufgaben ergeben sich hier die Gleichungen:

1) $C = \frac{MG \sin x - mg \sin y}{M+m}$;

2) $C^2 = D^2 - G^2 \cos x^2 = D^2 - G^2 + G^2 \sin x^2 =$
$= G^2 \sin x^2 - (G^2 - D^2)$;

3) $C^2 = g^2 \sin y^2 - (g^2 - d^2)$.

Ferner aus Nr. 2.

4) $C = \sqrt{[G^2 \sin x^2 - (G^2 - D^2)]}$;

aus Nr. 2. und 3.

5) $G^2 \sin x^2 - (G^2 - D^2) = g^2 \sin y^2 - (g^2 - d^2)$;

und hieraus

6) $\sin y = \frac{\sqrt{[G^2 \sin x^2 - (G^2 - D^2) + (g^2 - d^2)]}}{g}$.

Aus Nr. 1. und 4. ergiebt sich

7) $\sin y = \frac{MG \sin x - (M+m)\sqrt{[G^2 \sin x^2 - (G^2 - D^2)]}}{mg}$.

Ferner aus Nr. 6. und 7.

8) $m\sqrt{[G^2 \sin x^2 - (G^2 - D^2) + (g^2 - d^2)]} =$
$= MG \sin x - (M+m)\sqrt{[G^2 \sin x^2 - (G^2 - D^2)]}$

Diese Gleichung quadrirt giebt

9) $m^2 G^2 \sin x^2 - m^2 (G^2 - D^2) + m^2 (g^2 - d^2) =$
$= M^2 G^2 \sin x^2 - 2M(M+m) G \sin x \sqrt{[G^2 \sin x^2 - (G^2 - D^2)]}$
$+ (M+m)^2 G^2 \sin x^2 - (M+m)^2 (G^2 - D^2)$.

Hieraus

10) $2M (M+m) G \sin x \sqrt{[G^2 \sin x^2 - (G^2 - D^2)]} =$
$= (M^2 - m^2) G^2 \sin x^2 + (M+m)^2 G^2 \sin x^2 - (M+m)^2$
$(G^2 - D^2) + m^2 (G^2 - D^2) - m^2 (g^2 - d^2) = 2M (M+m)$
$G^2 \sin x^2 - [M (M+2m) (G^2 - D^2) + m^2 (g^2 - d^2)]$.

Setzt man dann $M(M+2m)(G^2 - D^2) + m^2 (g^2 - d^2) = S$, so erhält man

11) $2M (M+m) G \sin x \sqrt{[G^2 \sin x^2 - (G^2 - D^2)]} =$
$= 2M (M+m) G^2 \sin x^2 - S$. und aufs Quadrat erhoben

12) $4M^2 (M+m)^2 G^2 \sin x^2 [G^2 \sin x^2 - (G^2 - D^2)] =$
$= 4M^2 (M+m)^2 G^4 \sin x^4 - 4M (M+m) S G^2 \sin x^2 + S^2$

d. i.

$4M^2(M+m)^2 G^4 \sin x^4 - 4M^2(M+m)^2.(G^2 - D^2) G^2 \sin x^2 =$
$= 4M^2 (M+m)^2 G^4 \sin x^4 - 4M (M+m) S G^2 \sin x^2 + S^2$.

Hier hebt sich der erste Theil auf beyden Seiten des Gleichheitszeichens und es folgt

13) $4M(M+m) [S - M (M+m)(G^2 - D^2)] G^2 \sin x^2 = S^2$

d. i.

$4 G^2 (M+m) Mm [M(G^2 - D^2) + m (g^2 - d^2)] \sin x^2 = S^2$

folglich

14) $\sin x = \dfrac{S}{2G \sqrt{(M+m) Mm [M(G^2 - D)^2 + m (g^2 - d^2)]}}$

oder an die Stelle von S dessen Werth gesetzt

15) $\sin x = \dfrac{M (M+2m) (G^2 - D^2) + m^2 (g^2 - d^2)}{2G \sqrt{(M+m) Mm [M(G^2 - D^2) + m(g^2 - d^2)]}}$

Durch eine ähnliche Rechnung findet sich

16) $\sin y = \dfrac{M^2 (G^2 - D^2) + m (2M+m) (g^2 - d^2)}{2g \sqrt{(M+m) Mm [M(G^2 - D^2) + m (g^2 - d^2)]}}$

Der Winkel z findet sich aus $C = D \sin z$, also $\sin z = \dfrac{C}{D} =$ und hiernach mit Hülfe von Nr. 1. 15. und 16.

$$\sin z = \frac{M^2(G^2-D^2)-m^2(g^2-d^2)}{2D\sqrt{(M+m)Mm[M(G^2-D^2)+m(g^2-d^2)]}}$$

und auf ähnliche Weise

$$\sin u = \frac{M^2(G^2-D^2)-m^2(g^2-d^2)}{2d\sqrt{(M+m).Mm[M(G^2-D^2)+m(g^2-d^2)]}}$$

94. 1) $$\sin x = \frac{3(G^2-D^2)+(g^2-d^2)}{2G\sqrt{2(G^2-D^2+g^2-d^2)}}$$

$$\sin y = \frac{G^2-D^2+3(g^2-d^2)}{2g\sqrt{2(G^2-D^2+g^2-d^2)}}$$

$$\sin z = \frac{G^2-D^2-g^2+d^2}{2D\sqrt{2(G^2-D^2+g^2-d^2)}}.$$

$$\sin u = \frac{G^2-D^2-g^2+d^2}{2d\sqrt{2(G^2-D^2+g^2-d^2)}}$$

94. 2) $$\sin x = \frac{4G^2-(3D^2+d^2)}{2G\sqrt{2(2G^2-(D^2+d^2))}}$$

$$\sin y = \frac{4G^2-(D^2+3d^2)}{2G\sqrt{2(2G^2-(D^2+d^2))}}$$

$$\sin z = \frac{2G^2-(D^2-d^2)}{2D\sqrt{2(2G^2-(D^2+d^2))}}$$

$$\sin u = \frac{2G^2-(D^2-d^2)}{2d\sqrt{2(2G^2-(D^2+d^2))}}.$$

95. A behält seine Richtung bey, mit einer Geschwindigkeit von $16\frac{2}{3}$ Fuß; B prallt mit einer Geschwindigkeit von $56\frac{2}{3}$ Fuß in 1 Secunde zurück. (Vergl. über diese und die nächst folgenden Aufgaben mein Lehrbuch der Physik §. 87.)

96. In diesem Fall muß die Geschwindigkeit von A nach dem Stoße = 0 (Null) werden. Wenn also M, G, und m, g, wieder dieselbe Bedeutung wie im Vorhergehenden haben, und C die Geschwindigkeit von A, c die von B nach dem Stoß bedeutet, so ist hier

$$C = G - \frac{2m(G+g)}{M+m} = 0; \text{ folglich } G = \frac{2m(G+g)}{M+m}$$

d. i.

$30 = \frac{24 . (30 + g)}{72}$; woraus sich leicht $g = 60$ findet.

Ferner ist $c = g - \frac{2M (G + g)}{M + m}$ d. i. $= 60 - \frac{120 . 90}{72}$ $= - 90$.

97. Da durch eine Geschwindigkeit des Körpers B von 60 Fuß, A zum Stillstand gebracht wird, so muß dieser rückwärts getrieben werden, wenn B eine größere Geschwindigkeit, als 60 Fuß, bekommt.

Es sind also unzählige Auflösungen möglich, je nachdem A mit einer größern oder geringern Geschwindigkeit zurückprallen soll.

Z. B. für $g = 100$ wird $C = - 13\frac{1}{3}$.

98. Es muß also $c = - g$ werden; und dann ist $2g = \frac{2M (G + g)}{M + m}$; woraus sich $g = \frac{MG}{m}$ ergiebt; also für diesen Fall $= \frac{500}{6} = 83\frac{1}{3}$ Fuß.

99. Aus der Gleichung für C in 96. ist hier $- 15 = 40 - \frac{20 (40 + g)}{28}$; woraus sich $g = \frac{55 . 7 - 200}{5} = 77 - 40 = 37$ ergiebt; und c ist $= 37 - \frac{36 . 77}{28} = 37 - 99 = - 62$ d. i. B prallt mit einer Geschwindigkeit von 62 Fuß in 1 Secunde zurück.

100. Hier ist die Gleichung für die gesuchte Geschwindigkeit von A $20 = G - \frac{22 (G + 30)}{36}$; woraus $G = 98\frac{4}{7}$ Fuß. Für die Bewegung von B findet sich $c = 30 - \frac{50 . 128\frac{4}{7}}{36} = - 148\frac{4}{7}$ Fuß. Also prallt B mit dieser Geschwindigkeit zurück.

101. Aus der Gleichung $16 = 40 - \frac{36 . 64}{M + 18}$, ergiebt sich die gesuchte Masse $M = 78$; und aus

$c = 24 - \frac{156 . 64}{96}$ findet sich die Bewegung von B nach dem Stoß = — 80.

102. Die Gleichung für C ist hier $20 = 70 - \frac{2m . 100}{75}$; woraus m = $18\frac{3}{4}$ Pfund folgt. Folglich ist das Gewicht von A = 75 — $18\frac{3}{4}$ = $56\frac{1}{4}$ Pf. Alsdann ist die Geschwindigkeit von B nach dem Stoß $c = 30 - \frac{2 . 56\frac{1}{4} . 100}{75} =$ $= 30 - 150 = - 120$.

103. Es ist $C = 24 = G - \frac{10 (G + g)}{20}$; woraus $g = G - 48$ folgt. Ferner ist $c = - 48 = g - \frac{30 (G + g)}{20}$; woraus $g = 96 - 3G$. Aus beyden Werthen für g ergiebt sich dann $G = 36$; und $g = - 12$.

Der negative Werth von g zeigt an, daß B sich vor dem Stoße nicht gegen A, wie bisher angenommen ist, sondern nach der entgegengesetzten Seite, d. i. nach einerley Richtung mit A bewegt hat.

104. Bey dem schiefen Stoß elastischer Körper muß die Bewegung eines jeden, eben so wie bey den harten Körpern, in zwey andere zerlegt werden: 1) in eine senkrecht gegen die Berührungsebene; 2) in eine parallel mit derselben. Die erstere wird für den Körper A ebenfalls durch G sin x, und für B durch g sin y; die letztere für A durch G cos x; für B durch g cos y ausgedrückt, wenn x und y wiederum die Richtungswinkel ihrer Bewegungen anzeigen.

Aus G sin x und g sin y entsteht für den Körper A die Bewegung

$$C = G \sin x - \frac{2m (G \sin x + g \sin y)}{M + m} = \frac{(M - m) G \sin x - 2m g \sin y}{M + m}$$

und für den Körper B die Bewegung

$$c = g \sin y - \frac{2 M (G \sin x + g \sin y)}{M + m} = - \frac{(M - m) g \sin y + 2 M G \sin x}{M + m}$$

Auf den zweyten Theil der zerlegten Bewegungen, welcher der Berührungsebene parallel geht, hat die Elastizität keinen Einfluß, und er bleibt für $A = G \cos x$; für $B = g \cos y$. Setzt man dann $G \cos x = P$; $g \cos y = p$; so entsteht aus der Zusammensetzung der Bewegungen C und P für A die Bewegung
$D = \sqrt{(C^2 + P^2)}$; und aus c und p für B die Bewegung $d = \sqrt{(c^2 + p^2)}$.
Hiernach bewegt sich A in dem vorliegenden Fall nach dem Stoß mit einer Geschwindigkeit von 28,85 .. Fuß vorwärts; B mit einer Geschwindigkeit von 17,82 Fuß abwärts.

Der Winkel z, welchen die Bewegung von A, nach dem Stoß, gegen die Berührungsebene macht, wird durch $\tan z = \frac{C}{P}$; und der Winkel u, welchen B gegen dieselbe macht, durch $\tan u = \frac{c}{p}$ gefunden.

Hiernach ist in diesem Fall $z = 1^\circ\ 47'\ 52''$; $u = 127^\circ\ 57'\ 16''$.

Da die Quadratwurzeln, durch welche D und d bestimmt werden, sowohl positiv als negativ seyn können, so hängt es von der Beschaffenheit der Größen C und c ab, welche Vorzeichen D und d bekommen müssen.

105. In diesem Fall ist $D = 73{,}54 ..$; $d = -62{,}2 ..$; $z = 9''\ 36'\ 16''$; $u = 117^\circ\ 16'\ 14''$.

106. Da alsdann $M - m = o$ und $M + m = 2m$ wird, so ist $C = -g \sin y$; $c = -G \sin x$. Die Größe der Massen selbst kommt also dabey gar nicht in Betrachtung.

Die Ausdrücke für D und d bleiben zwar dieselben; es ist aber auch $D = \sqrt{(g^2 \sin y^2 + G^2 \cos x^2)}$; und $d = \sqrt{(G^2 \sin x^2 + g^2 \cos y^2)}$.

Aus den beyden letztern Gleichungen folgt $D^2 + d^2 = G^2 + g^2$ d. i. die Summe der Quadrate der Geschwindigkeiten nach dem Stoß ist der Summe der Quadrate derselben vor dem Stoße gleich.

107. A prallt mit einer Geschwindigkeit von 78,9 Fuß, unter einem Winkel von 166°. 4′, B mit einer Geschwindigkeit von 76,1 Fuß, unter einem Winkel von 165° 31′ zurück.

108. In diesem Fall ist $g = o$ und daher $D = \sqrt{G^2 \cos x^2} = G \cos x$; $d = \sqrt{G^2 \sin x^2} = G \sin x$. A bewegt sich also nach dem Stoß mit einer Geschwindigkeit von 37,08.. Fuß der Berührungsebene parallel; B mit einer Geschwindigkeit von 114,12.. Fuß senkrecht von der Ebene abwärts.

Die Bewegungen beyder Körper nach dem Stoß schließen, bey gleichen Massen, wenn B vor dem Stoße ruht, jederzeit einen rechten Winkel ein.

109. Zufolge der Erläuterungen in 104 ist $D^2 = C^2 + P^2$, das ist hier, $324 = C^2 + 400 \cos 32^2 = C^2 + 287,674..$ folglich $C = \pm 6,02..$ Da in der Aufgabe angenommen ist, daß A zurückprallt, so ist C negativ. Die Gleichung für C in 104 giebt

$$-6,02 = \frac{(M - 8)\, 20 . \sin 32 - 16 . 16 \sin 45}{M + 8}$$

und hieraus ergiebt sich $M = 13,09..$ Pfund.

Die Geschwindigkeit von B nach dem Stoß findet sich aus

$$c = -\frac{5,09 . 16 . \sin 45 + 26,18 . 20 \sin 32}{21,09} = -18,61...$$

und aus $p = 16 . \cos 45$. und ist $= \sqrt{(c^2 + p^2)} = -21,7..$ Der Winkel, unter welchem A von der Berührungsebene zurückfährt, ist 160° 27′ 41″. B hingegen macht einen Winkel von 175° 4′ 50″.

110. Hier ist $D^2 = 50,76^2 = C^2 + 54^2 . \cos 20^2$; also $C^2 = 50,76^2 - 54^2 . \cos 20^2 = 1,69$ und $C = \sqrt{1,69} = 1,3$. Ferner ist

$$1,3 = \frac{(15 - m)\, 54 \sin 20 - 2\, m\, 21 . \sin 12}{15 + m};$$ woraus sich

$$m = \frac{15\,(54 \sin 20 - 1,3)}{54 \sin 20 + 42 \sin 12 + 1,3} = 9,03$$ Pfund ergiebt.

Die Geschwindigkeit von B nach dem Stoß findet sich, wie bey der vorigen Aufgabe $= \sqrt{(c^2 + p^2)} = -31,69$.

A macht bey seinem Fortgange nach dem Stoß einen Winkel von $1^0\ 28'$ gegen die Berührungsebene; B prallt nach dem Stoß unter einem Winkel von $130^0\ 22'\ 48''$ von derselben zurück.

111. Es ist

$$M = m\,\frac{G \sin x + 2 g \sin y \pm \sqrt{(D^2 - G^2 \cos x^2)}}{G \sin x \mp \sqrt{(D^2 - G^2 \cos x^2)}}$$

$$m = M\,\frac{G \sin x \mp \sqrt{(D^2 - G^2 \cos x^2)}}{G \sin x + 2 g \sin y \pm \sqrt{(D^2 - G^2 \cos x^2)}}$$

Aus der Richtung die A nach dem Stoß gegen die Berührungsebene haben soll, ergiebt sich, ob C positiv oder negativ zu nehmen ist; und hieraus, ob die Größe unter dem Wurzelzeichen + oder — ist; sie ist aber im Nenner jederzeit auf die entgegengesetzte Art wie in Zähler zu nehmen.

112. Wenn beyde Körper gleiche Gewichte haben, so kommt die Größe desselben nicht in Betrachtung; denn in dem allgemeinen Ausdruck für C (Nr. 104.) wird alsdann $M - m = 0$; und $2m$ im Zähler hebt sich gegen $2M$ im Nenner. Es bleibt also $C = - g \sin y$; also in diesem Fall $= - 25 . \sin 35 = - 14{,}339 \ldots$ Ferner ist $D^2 = C^2 G^2 \cos x^2$; also

$$G = \sqrt{\frac{D^2 - C^2}{\cos x^2}} \text{ d. i. } G = \frac{\sqrt{(900 - 205{,}618..)}}{\cos 50} = 40{,}99..$$

oder beynahe 41 Fuß.

Die Geschwindigkeit von B nach dem Stoß ist $= - 36{,}8..$

113. Hier ist $C = \frac{2 G \sin 30 - 24 \sin 16}{8}$, und da $\sin 30 = \frac{1}{2}$ ist, so ist

$$C = \frac{G - 24 \sin 16}{8}; \text{ u. } C^2 = \frac{G^2 - 48 \sin 16 G + 576 \sin 16^2}{64}$$

Es ist ferner $C^2 = D^2 - G^2 \cos 30^2 = 75{,}1862 - G^2 \cos 30^2$. Folgl. $G^2 - 48 \sin 16\, G + 576 . \sin 16^2 = 64 . 75{,}1862 - 64 G^2 \cos 30^2$. Ferner $(64 \cos 30^2 + 1) G^2 - 48 \sin 16\, G = 64 . 75{,}1862 - 576 \sin 16^2$ d. i. $49 G^2 - 13{,}2305\, G = 4768{,}159 \ldots$ Dieß mit 49 dividirt und ergänzt, giebt

$$G^2 - \frac{13{,}2305}{49}G + \left(\frac{6{,}6153}{49}\right)^2 = \frac{4768{,}159}{49} + \frac{43{,}7621}{49^2}$$

$= \frac{233683{,}553}{49^2}$. Folglich $G - \frac{6{,}615}{49} = \frac{483{,}4}{49}$; und

$$G = \frac{483{,}4}{49} + \frac{6{,}6}{49} = \frac{490{,}0}{49} = 10.$$

Die Geschwindigkeit von B nach dem Stoß ist $= -7{,}57$..

114. Der Werth von G ist aus den Gleichungen für C und D (Nr. 104.) abzuleiten. Aus der ersten ergiebt sich

$$C^2 = \frac{(M-m)^2 G^2 \sin x^2 - 4(M-m) mGg \sin x \sin y + 4 m^2 g^2 \sin y^2}{(M+m)^2}$$

und aus der zweyten: $C^2 = D^2 - G^2 \cos x^2$. Aus beyden folgt $(M-m)^2 G^2 \sin x^2 - 4(M-m) mGg \sin x \sin y +$

$$4 m^2 g^2 \sin y^2 = (M+m)^2 D^2 - (M+m)^2 G^2 \cos x^2$$

Hieraus läßt sich weiter ableiten

$$[(M-m)^2 + 4 Mm \cos x^2] G^2 - 4(M-m) mg \sin x \sin y\, G$$
$$= (M+m)^2 D^2 - 4 m^2 g^2 \sin y^2.$$ Ferner

$$G^2 - \frac{4(M-m) mg \sin x \sin y}{(M-m)^2 + 4 Mm \cos x^2} G = \frac{(M+m)^2 D^2 - 4 m^2 g^2 \sin y^2}{(M-m)^2 + 4 Mm \cos x^2}$$

Diese Gleichung ergänzt, giebt

$$G^2 - \frac{4(M-m) mg \sin x \sin y}{(M-m)^2 + 4Mm \cos x^2} G + \left(\frac{2(M-m) mg \sin x \sin y}{(M-m)^2 + 4 Mm \cos x^2}\right)^2 =$$
$$= \frac{(M+m)^2 D^3 - 4 m^2 g^2 \sin y^2}{(M-m)^2 + 4 Mm \cos x^2} + \left(\frac{2(M-m) mg \sin x \sin y}{(M-m)^2 + 4 Mm \cos x^2}\right)^2$$

Die beyden Brüche rechter Hand des Gleichheitszeichens auf einerley Benennung gebracht, indem man den Zähler des ersten Bruchs mit seinem Nenner multiplizirt, geben, zusammenaddirt, nach gehöriger Redukzion

$$\frac{(M^2 - m^2)^2 D^2 + 4(M+m)^2 \cos x^2 (MmD^2 - m^2 g^2 \sin y^2)}{[(M-m)^2 + 4 Mm \cos x^2]^2}$$

Hiernach ist

$$G - \frac{2(M-m) mg \sin x \sin y}{(M-m)^2 + 4 Mm \cos x^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{[(M^2 - m^2)^2 D^2 + 4(M+m)^2 \cos x^2 (MmD^2 - m^2 g^2 \sin y^2)]}}{(M-m)^2 + 4 Mm \cos x^2}$$

und

$$G = \frac{\sqrt{[(M^2 - m^2)^2 D^2 + 4(M+m)^2 \cos x^2 (MmD^2 - m^2 g^2 \sin y^2)] + 2(M-m) mg \sin x \sin y}}{(M-m)^2 + 4 Mm \cos x^2}$$

Dieser in der That sehr weitläuftige Ausdruck schwindet, wenn $M = m$ gesetzt wird, sehr zusammen; und dann ist

$$G = \frac{\sqrt{(D^2 - g^2 \sin y^2)}}{\cos x}$$

Und wird überdieß $g = o$ angenommen, so ist $G = \frac{D}{\cos x}$.

115. Auch hier muß, wie bey der vorhergehenden Aufgabe, aus den beyden Gleichungen für C^2 eine dritte Gleichung abgeleitet werden, und da $D^2 - G^2 \cos x^2 = D^2 - G^2 + G^2 \sin x^2$ ist, so erhält man leicht $4 MmG^2 \sin x^2 + 4(M-m) mGg \sin y \sin x = (M+m)^2 (G^2 - D^2) + 4 m^2 g^2 \sin y^2$ Hieraus ergiebt sich ferner

$$\sin x^2 + \frac{(M-m) mg \sin y}{MmG} \sin x + \frac{(M-m)^2 m^2 g^2 \sin y^2}{4 (Mm)^2 G^2} =$$

$$= \frac{(M+m)^2 (G^2 - D^2)}{4 Mm G^2} + \frac{4 m^2 g^2 \sin y^2}{4 Mm G^2} + \frac{(M-m)^2 m^2 g^2 \sin y^2}{4 (Mm)^2 G^2} =$$

$$= \frac{(M+m)^2 [Mm (G^2 - D^2) + m^2 g^2 \sin y^2]}{4 (Mm)^2 G^2}$$

Die Quadratwurzel hieraus giebt

$$\sin x = \frac{(M+m) \sqrt{[Mm (G^2 - D^2) + m^2 g^2 \sin y^2]} - (M-m) mg \sin y}{2 Mm G}$$

Ist x gegeben und y gesucht, so wird die Rechnung einfacher, weil man in der Gleichung für $C^2 = D^2 - G^2 \cos x^2$ das letztere Glied nicht zu ändern braucht, und bey der Ergänzung der quadratischen Gleichung von $\sin y^2$ sich $\pm (M-m)^2 G^2 \sin x^2$ gegenseitig aufheben. Man erhält daher

$$\sin y = \frac{(M+m) \sqrt{(D^2 - G^2 \cos x^2)} + (M-m) G \sin x}{2 mg}$$

116. $$\sin x = \frac{(M+m) \sqrt{(d^2 - g^2 \cos y^2)} - (M-m) g \sin y}{2 MG}$$

$$\sin y = \frac{(M+m) \sqrt{[M^2 G^2 \sin x^2 + Mm (g^2 - d^2)]} + (M-m) MG \sin x}{2 Mmg}$$

Aus der Zusammenstellung beyder Werthe von $\sin x$ in 115. und 116. erhält man

$$M(G^2 - D^2) = m(d^2 - g^2) = - m(g^2 - d^2)$$

Dasselbe ergiebt sich auch aus den beyden Werthen von $\sin y$, und es wird dadurch ein merkwürdiges Verhältniß dieser Größen dargestellt. Zugleich erhellet daraus, daß aus den Massen der Körper und ihren Geschwindigkeiten vor und nach dem Zusammenstoßen die Richtungswinkel, x und y, nicht bestimmt werden; daß folglich für dieselben Massen und Geschwindigkeiten unzählige Werthe von x und y möglich sind. Indessen giebt es gewisse Grenzen, zwischen welchen die gültigen Werthe von x und y fallen, und die für jeden andern Fall sich anders bestimmen.

Die Grenzen für x fänden sich, wenn man 1) in der Gleichung für $\sin y$ (in 115.) die Größe unter dem Wurzelzeichen $= 0$ setzt, also $D^2 = G^2 \cos x^2$; folglich $\cos x = \sqrt{\frac{D^2}{G^2}} = \frac{D}{G}$; und dieß ist der **kleinste** Werth für x. Denn wollte man x noch kleiner nehmen, so würde $\cos x$ größer; folglich $D^2 - G^2 \cos x^2$ **negativ**, und daher $\sqrt{(D^2 - G^2 \cos x^2)}$ **unmöglich** werden. Für diesen kleinsten Werth von x wird $\sin y = \frac{(M - m) G \sin x}{2 mg}$; und da $\sin y$ nicht kleiner werden kann, ohne daß $\sin x$ kleiner wird, so giebt diese Gleichung auch den kleinsten Werth für y.

2) Der **größte** Werth für x findet dann statt, wenn in derselben Gleichung für $\sin y$ Zähler und Nenner gleichgesetzt werden; also $\sin y = 1$ und $y = 90$ Grad. Alsdann ist

$$\sin x = \frac{(M + m) \sqrt{[Mm (G^2 - D^2) + m^2 g^2]} - (M - m) mg}{2 MmG.}$$

117. Der kleinste Werth von x ist $= 63^0\ 14'\ 22''$; der größte $= 67^0\ 55'\ 27''$.. Der kleinste Werth von $y = 26^0\ 30'\ 50''$, der größte $= 90^0$. Beyde Werthe geben $d = - 25{,}58$.

Nimmt man für x einen Zwischenwerth z. B. 65^0; so findet sich $y = 52^0$ und d ebenfalls $= - 25{,}58$. wodurch das Obige eine gute Bestätigung erhält.

118. $\sin x = \sqrt{\frac{(G^2 - D^2 + g^2 \sin y^2)}{G}}$;

$$\sin y = \sqrt{\frac{(D^2 - G^2 \cos x^2)}{g}}.$$

119. Wenn eine elastische Kugel gegen eine andere halb so große und ruhende central stößt, so erhält diese eine Geschwindigkeit, die $\frac{4}{3}$ so groß, als die der ersten ist. (S. mein Lehrb. der Physik § 88.) Stößt nun, bey der angenommenen Reihe, die zweyte gegen die dritte, so erhält diese wieder eine Geschwindigkeit, die $\frac{4}{3}$ so groß, als die der zweyten oder $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ mal so groß, als die der ersten ist. Folglich ist die Geschwindigkeit der letzten Kugel $= \left(\frac{4}{3}\right)^9 5 = 66{,}59$.. Fuß in 1 Secunde.

120. Es sey die gesuchte Geschwindigkeit $= x$, so muß hier $\left(\frac{4}{3}\right)^9 x = 100$ seyn; folglich $x = \left(\frac{3}{4}\right)^9 100 = 7{,}508$.. Fuß.

---

121. Es sey das gesuchte Gewicht $= x$, so muß $3\frac{1}{4} . 9\frac{7}{8} = 5\frac{2}{3} x$ seyn; folglich $x = 5\frac{361}{544} = 5\frac{2}{3}$ Pf. beynahe.

122. Die Länge des einen Arms sey $= x$, so ist die des andern $= 8\frac{1}{6} - x$; folglich $25\frac{3}{8} x = 17\frac{1}{2} (8\frac{1}{6} - x)$; woraus sich $x = 3\frac{1}{3}$ ergiebt. Die Länge des andern Arms ist $= 4\frac{5}{6}$ Fuß.

123. Man theile $42\frac{101}{165}$ in zwey Theile, die sich verhalten wie $9\frac{1}{3} : 5\frac{1}{2}$ d. i. in $26\frac{134}{165}$ und $15\frac{4}{5}$. Das größere Gewicht gehört an den kürzern, das kleinere an den längern Arm.

124. Es sey der Abstand vom Unterstützungspunkt auf dem längern Arm $= x$, auf dem kürzern $= y$, alsdann ist $50 . 60 + 30 x = 42 . 75 + 25 y$ d. i. $3000 + 30 x = 3150 + 25 y$, woraus sich ergiebt $x = 5$ Zoll und $\frac{5}{6} y$ Zoll.

Es sind folglich unzählige Auflösungen möglich. Es sey z. B. $y = 6$ Zoll, so wird $x = 10$ Zoll. Werden die 25 Pf. an das Ende des Arms gehängt, also $y = 42$, so wird $x = 40$.

125. Bey dem Winkelhebel verhält sich das ganze Gewicht zu dem Theil desselben, welcher senkrecht auf den Arm wirkt, wie 1 zum Sinus des Winkels, unter welchem das Gewicht auf den Arm wirkt; also hier bey dem einen Arm wie $1 : \sin 54$; bey dem andern wie $1 : \sin 40$. Nennt man also das gesuchte Gewicht x, so entsteht ein Gleichgewicht, wenn $5 . 70 . \sin 54 = 3 . x \sin 40$ ist, woraus $x = 146,83\ldots$ Pf. folgt.

126. Es sey die gesuchte Länge $= x$, so muß

$$4 . 130 . \sin 46 = 200\, x \sin 65$$

oder $13 . \sin 46 = 5\, x \sin 65$ seyn; woraus sich $x = 2,06\ldots$ Fuß ergiebt.

127. Die Gleichung ist $38 . 10 . \sin 64 = 25 . 15 . \sin x$; woraus sich der gesuchte Winkel $x = 65^0\ 36'\ 47''$ ergiebt.

128. Es sey der Winkel an dem längern Arm $= x$, so hat man die Gleichung

$$45 . 30 \sin x = 32 . 24 . \sin 2x = 32 . 24 . 2 \sin x \cos x$$

Hebt man hier die gleichen Faktoren auf beyden Seiten auf, so erhält man $\cos x = \frac{450}{512}$; und $x = 28^0\ 29'\ 21''$.

129. I. Man bringe den Körper A, der an dem längern oder kürzern Arm hängen mag, durch Gewichte, die man in die Schale des andern Arms legt, genau ins Gleichgewicht; nehme ihn dann aus seiner Schale heraus und lege an seine Stelle so viel Gewichte in dieselbe, daß wiederum ein Gleichgewicht entsteht; alsdann ist offenbar diese substituirte Anzahl von Gewichten dem Gewicht des Körpers gleich.

II. läßt sich das Gewicht, x, eines Körpers finden, wenn man diesen zuerst in die Schale des längern Armes legt und durch ein Gewicht, p, aufwiegt; alsdann den Körper A in die Schale des kürzern, und das Gewicht p in die des längern Arms bringt, und abermals ein Gleichgewicht bezweckt, indem man dem Körper A noch ein Gewicht, q, zulegt.

Setzt man dann den kürzern Arm $= a$; und den längern $=$ $= a + \frac{1}{m} a$, so ist

$$1)\ pa = x\left(a + \frac{1}{m} a\right) = x \frac{m+1}{m} a;\quad 2)\ (x+q)\, a = p \frac{m+1}{m} a.$$

Aus Nr. 1. ist $\frac{p}{x} = \frac{m+1}{m}$. Aus Nr. 2. ist $\frac{m+1}{m} = \frac{x+q}{p}$.

Folglich ist $\frac{p}{x} = \frac{x+q}{p}$; ferner $x^2 + qx = p^2$; und hieraus

$$x = \frac{\sqrt{(4p^2 + q^2)} - q}{2}.$$

Man braucht also weder die Längen der Arme selbst, noch ihr Verhältniß zu einander zu kennen. Das letztere läßt sich aus den Gewichten finden. Denn es ist $\frac{p}{x} - 1 = \frac{1}{m}$. Die Längen der Arme selbst können dabey unendlich verschieden seyn.

Wird der Körper A zuerst an den kürzern Arm gebracht, und mit p ins Gleichgewicht gesetzt, so muß, nach Verwechselung der Gewichte, mit p noch ein Gewicht q verbunden werden, um A aufzuwiegen. Man hat in diesem Fall

$$1)\ ax = \left(a + \frac{1}{m} a\right) p = ap \frac{m+1}{m} \text{ und } x = \frac{m+1}{m} p.$$

$$2)\ a(p+q) = ax \frac{m+1}{m}; \text{ und } \frac{m+1}{m} = \frac{p+q}{x}.$$ Folglich

$\frac{x}{p} = \frac{p+q}{x}$; und $x^2 = p^2 + pq$; also $x = \sqrt{(p^2 + pq)}$ oder $p : x = x : p + q$ d. i. x die mittlere Proportionalgröße zwischen p und $p + q$.

130. Es sey der kürzere Arm a, der längere $a + \frac{1}{m} a = \frac{m+1}{m} a$, und das gesuchte Gewicht $= x$, so ist

$$1)\ 13\tfrac{1}{2} a = x \frac{m+1}{m} a; \text{ also } \frac{m+1}{m} = \frac{27}{2x}$$

2) $(x+3\frac{3}{16})a=\frac{27}{2}\cdot\frac{m+1}{m}a$; also $\frac{m+1}{m}=\frac{16x+51}{16}\cdot\frac{2}{27}$.

Aus beyden Werthen von $\frac{m+1}{m}$ folgt

$\frac{27}{2x}=\frac{16x+51}{16}\cdot\frac{2}{27}$; und hieraus findet sich

$$x^2+\frac{51}{16}x+\left(\frac{51}{32}\right)^2=\frac{27^2}{4}+\left(\frac{51}{32}\right)^2=\frac{189225}{1024}$$

$$\text{und } x=\sqrt{\frac{189225}{1024}}-\frac{51}{32}=\frac{384}{32}=12.$$

Das Verhältniß der Arme ist $=8:9$.

131. Hier findet sich durch eine ähnliche Rechnung, wie bey der vorhergehenden Aufgabe $x^2=324$; und $x=18$; das Verhältniß der Arme aber ist $=2:3$.

132. Es sey das Verhältniß der beyden Arme $=m:n$, so ist 1) $mx=np$; 2) $mp=ny$; also $x=\frac{n}{m}p$; $y=\frac{m}{n}p$; folglich $x+y=\left(\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\right)p=\frac{n^2+m^2}{nm}p$. Man setze $n=m+d$ so ist $x+y=\frac{2m^2+2md+d^2}{m(m+d)}p=\left(2+\frac{d^2}{nm}\right)p$.

133. Man mache $CD=10$; $CE=6$ (Fig. 10.), und vollende das Parallelogramm CDFE. Die Diagonale CF giebt die Richtung und Stärke, mit welcher der Punkt, C, von P und Q gezogen wird. Es ist aber $CF=12{,}523\ldots$ der Winkel $DCE=80$ Gr. — Man verlängere FC nach G und mache $CG=CF$. Ein Gewicht in $G=12{,}523$ Pf. das nach der Richtung CG wirkte, würde ein Gleichgewicht hervorbringen. Statt dessen wirkt das Gewicht K in vertikaler Richtung, CK; und es ist, wenn man GK senkrecht auf CK zieht, $CG:CK=1:\cos GCK$.

Um den Winkel GCK zu finden, suche man den Winkel FCD durch die Proportion: $CF:FD=\sin 80:\sin FCD$; wo $FCD=28^0\ 9'\ 13''$. Hierzu addirt $DCm=40$ giebt

$FCm = GCn = 68^{\circ}\ 9'\ 13''$; und $GCK = 90^{\circ} - GCn = 21^{\circ}\ 50'\ 47''$.

Hiernach findet sich $CK = 11,623\ldots$ — so viel Pfund also muß das Gewicht K betragen.

134. Die beyden Kräfte, Q und P (Fig. 11.), die unter einem rechten Winkel auf den Punkt C wirken, bringen daselbst eine Wirkung $= \sqrt{(Q^2 + P^2)}$ hervor; und diese soll $= 30$ Pf. seyn. Es ist daher $22,98^2 + P^2 = 900$; folglich $P = \sqrt{(900 - 528,08)} = \sqrt{371,92} = 19,28\ldots$

135. Die beyden Kräfte, P und Q, die zugleich auf den Punkt C wirken, sollen in demselben eine Bewegung $= 50$, der Richtung CK entgegengesetzt, hervorbringen. Die Diagonale des Parallelogramms der Kräfte ist also $= 50$; und von den beyden Seiten desselben die eine $= 36$, die andere $= 24$. Hieraus läßt sich der von ihnen eingeschlossene Winkel A finden,

indem $\cos A = \frac{50^2 - (36^2 + 24^2)}{2 \cdot 36 \cdot 24} = \frac{628}{1728}$ ist (vergl. oben Nr. 24.) d. i. $A = 68^{\circ}\ 41'\ 21''$. Darauf construire man das Parallelogramm ABCD (Fig. 12.), dessen Winkel $= A$ ist, und dessen Seiten und Diagonale sich wie 24; 36; und 50 verhalten, so ist $AC : BC = \sin A : \sin y$ d. i. $50 : 24 = \sin 68^{\circ}\ 41'\ 21'' : \sin y$; woraus $y = 26^{\circ}\ 33'\ 45''$; also $x = 42^{\circ}\ 7'\ 36''$; und $BAM = 63^{\circ}\ 26'\ 15''$; $DAN = 47^{\circ}\ 52'\ 24''$ folgt.

136. Die Linie ME (Fig. 13.), als die verlängerte Richtung des Fadens, muß durch denjenigen Punkt des Trapezes gehen, in welchem das Viereck ACEM dem Dreyeck MED das Gleichgewicht hält. Der Schwerpunkt des Vierecks liegt in c, dem Durchschnittspunkt der Diagonalen, AE und MC; der Schwerpunkt des Dreyecks in b, wenn $Fb = \frac{1}{3}$ DF, und F die Mitte von ME ist. Das Gewicht des Vierecks aber verhält sich zu dem des Dreyecks, da beyde einerley Grundlinie, ME, haben, wie $2AM : MB$ oder kürzer, wie $2x : a - x$; folglich müssen die Abstände der Schwerpunkte von ME sich umge-

kehrt wie diese Gewichte verhalten, d. i. $\frac{1}{2}x : \frac{1}{2}(a - x) = a - x : 2x$; woraus sich $x = a\frac{\sqrt{3}-1}{2} = 0{,}366\,a$; $a - x = 0{,}634\,a$ ergiebt.

137. Es sey ADBC (Fig. 14.) die Halbkugel, OA der Faden, und AE die verlängerte Richtung desselben; da der Schwerpunkt jederzeit in der vertikalen Linie unter dem Aufhängungspunkt, also in OE liegt, und überdieß bey der Halbkugel in den auf der Grundfläche senkrechten Halbmesser, CD, fällt, so ist der Durchschnittspunkt, E, beyder Linien, der Schwerpunkt. Alsdann giebt die Proportion $AC : CE = 1 : \tang 20^0\,33'\,21'',8$ den Abstand desselben vom Mittelpunkt $= \frac{3}{8}$ des Halbmessers.

138. Man kann den Pfahl als den Arm eines Hebels betrachten, an welchem eine Kraft eine desto größere Wirkung hervorbringt, je länger der Arm ist. Der Kraft in E (Fig. 15.) gehört der Arm BE, der Kraft in H der Arm BH zu. Soll also die Kraft, K, in H eben so viel wirken, als die 50 Zentner in E, so muß $K . BH = 50 . 12$ seyn. — In H wirkt eine Kraft von 30 Zentnern, aber nicht in senkrechter, sondern in schiefer Richtung, CH. Diese läßt sich zerlegen in eine senkrechte auf BH, die gleich EC; und in eine parallele, die gleich EH ist; und nur die erstere kommt hier in Betrachtung. Es ist daher

die Kraft $K = \frac{EC}{CH} 30 = \frac{16}{\sqrt{(x^2 + 16^2)}} . 30$, wenn $EH = x$ gesetzt wird. Man bekommt also die Gleichung

$$50 . 12 = \frac{16}{\sqrt{(x^2 + 16^2)}} . 30 . (x + 12)$$

folglich ist $\sqrt{(x^2 + 256)} . 50 . 12 = 16 . 30 . (x + 12)$; oder mit 4 . 30 gehoben $5\sqrt{(x^2 + 256)} = 4(x + 12)$

Ferner $25x^2 + 6400 = 16x^2 + 384x + 2304$

und $9x^2 - 384x = -4096$

woraus sich $x = 21\frac{1}{3}$; folglich $BH = 33\frac{1}{3}$ Fuß ergiebt.

139. Wie $10 : 19 . \frac{12}{\sqrt{(144 + 81)}} = 10 : 19 . \frac{4}{5} = 25 : 38 = 1 : 1{,}52$.

140. Man setze die Entfernung des gesuchten Punktes von $E = x$, so kommt es darauf an, die Größe von x zu finden, bey welcher das Produkt $\frac{12}{\sqrt{(x^2 + 144)}} . (10 + x)$ ein Größtes wird. Der Grund davon erhellet aus Nr. 138. Die Größe der in C wirkenden Kraft selbst kommt hierbey nicht in Betrachtung, da nicht von einer absolut-größten, sondern von einer relativ-größten Wirkung die Rede ist. Es sey das gedachte Produkt $= P$; alsdann ergiebt sich durch Differenziirung der Gleichung $P = \frac{12}{\sqrt{(x^2 + 144)}} . (10 + x)$ bey welchem Werth von x, P am größten ist.

Es ist aber

$$dP = \left[12\sqrt{(x^2 + 144)}\, dx - \frac{12 . (10 + x)\, x dx}{\sqrt{(x^2 + 144)}}\right] : (x^2 + 144)$$

und $\frac{dP}{dx} = \frac{12(x^2 + 144) - 12 . (10 + x)\, x}{(x^2 + 144)^{\frac{3}{2}}}$. Wird dieses $= 0$, so ist $12(x^2 + 144) = 12(10x + x^2)$. Folglich $144 = 10x$ und $x = 14{,}4$. Der Abstand des gesuchten Punktes von B ist $= 10 + 14{,}4 = 24{,}4$.

Das Verhältniß der Wirkungen aber in E und in dem gesuchten Punkt, ist wie $10 : \frac{24{,}4 . 12}{\sqrt{(14{,}4^2 + 144)}} = 10 : 15{,}625 = 2 : 3{,}125 = 16 : 25$.

141. Es sey wieder $EH = x$, und die Wirkung der Kraft p in C auf den Pfahl in der schiefen Richtung $= P$, so erhält man die Gleichung $\frac{a}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}\, p . (c + x) = P$; und diese differenziirt giebt

$$\frac{\sqrt{(a^2 + x^2)}\, apdx - ap(c + x)\, d(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2 + x^2} = dP$$

d. i.

$$\frac{\sqrt{(a^2+x^2)}\,apdx - \frac{ap(c+x)xdx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}}{a^2+x^2} = dP$$

folglich

$$\frac{\sqrt{(a^2+x^2)}\,ap - \frac{ap(c+x)x}{\sqrt{(a^2+x^2)}}}{a^2+x^2} = \frac{dP}{dx}.$$ Wird dieß = o gesetzt, so ist $\sqrt{(a^2+x^2)}\,ap = \frac{ap(c+x)x}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$. Ferner $a^2+x^2 = cx+x^2$; also $a^2 = cx$; und $x = \frac{a^2}{c}$.

Hiernach ist x die dritte Proportionallinie zu c und a; oder a die mittlere Proportionallinie zwischen c und x.

Zieht man daher die Linie CB (Fig. 16.), so ist BCH ein Winkel im Halbkreise, und das Dreyeck BCH rechtwinklig. Hieraus ergiebt sich eine sehr leichte Construkzion den Punkt H zu finden.

Daß aber die Wirkung einer Kraft aus C auf AB ein Größtes wird, wenn CH auf CB senkrecht steht, läßt sich auch geometrisch erweisen.

Denn man nehme irgend eine andere Richtung, CF, so verhalten sich die Wirkungen der Kraft in H und in F wie $\frac{CE}{CH}.BH : \frac{CE}{CF}.BF$. Es ist aber $\frac{CE}{CH} = \frac{CB}{BH}$, und daher das Verhältniß der Wirkungen in H und in F, wie $\frac{CB}{BH}.BH : \frac{CE}{CF}.BF$ d. i. wie $CB : \frac{CE}{CF}.BF$ oder wie $CB.CF : CE.BF$. Das Produkt CE.BF drückt den doppelten Inhalt des Dreyecks BFC aus. Das Produkt CB.CF aber ist größer. Denn das Perpendikel aus F auf CB würde einen gleichen Inhalt geben; und CF ist größer, als ein solches Perpendikel. Folglich ist auch das Produkt $CB.CF > CE.BF$.

Ein ganz ähnlicher Beweis ergiebt sich, wenn man aus C eine Linie nach einem jenseits H liegenden Punkte zieht.

142. Es sey das gesuchte Gewicht $= x$, so muß $\frac{12 . 26}{\sqrt{(324 + 144)}} . x = 8 . 60$ seyn, woraus sich $x = 33,28 \ldots$ Zentner ergiebt.

143. Es sey AC (Fig. 17.) $= a$, die Kraft in C $= p$, AM $= x$, AN $=$ CM $= y$. Da die Wirksamkeit der Kraft p auf A abnimmt, so wie die Entfernung zunimmt, so ist sie in M $= \frac{a}{x} p$. Hier wirkt sie in schiefer Richtung, MA, auf A; und diese Wirkung läßt sich zerlegen in eine senkrecht auf AB, und in eine, die mit AB zusammenfällt. Nur die letztere wirkt dahin, den Körper nach B zu treiben, und sie verhält sich zu der Kraft in M, wie AN : AM d. i. $= y : x$. Die Wirksamkeit der Kraft p auf A, um dieses nach B zu treiben, läßt sich also durch das Produkt $\frac{a}{x} . \frac{y}{x} p = \frac{ay}{x^2} p$ ausdrücken. Es sey dieses $= K$; dann findet sich durch Differenziirung der Gleichung der Werth von x, bey welchem K am größten ist. Es ist aber $dK =$

$$\frac{apx^2 dy - apy\, 2xdx}{x^4} = \frac{apxdy - 2apydx}{x^3}.$$

Es ist ferner $x^2 = a^2 + y^2$; folglich $2xdx = 2ydy$; und $dy = \frac{x}{y} dx$. Also $dK = \frac{\frac{apx^2}{y} dx - 2apydx}{x^3}$ und $\frac{dK}{dx} = \frac{apx^2 - 2apy^2}{yx^3}$. Wird dieser Werth $= o$ gesetzt, so erhält man $apx^2 = 2apy^2$ oder $x^2 = 2y^2$. Folglich ist x die Diagonale eines Quadrats, und CM $= a$.

Da $\frac{a}{x} = \sin u$; $\frac{y}{x} = \cos u$ ist, so steht die Wirksamkeit der Kraft p in M im Verhältniß von $\sin u . \cos u$. Dieses Produkt ist $= \frac{1}{2} \sin 2u$, und da der Sinus des rechten

Winkels der größte ist, so ist das Produkt am größten, wenn u = 45 Grad ist. Dieß findet aber bey einer Figur, wie ACMN, nur statt, wenn sie ein Quadrat ist.

144. Der Druck ist dem Gewicht einer Wassersäule von 10 Zoll Durchmesser und 5 Fuß Höhe gleich, d. i.

$$= \frac{25 . \pi . 60 . 330,94}{7680} = 203,06 .. \text{ Pfund.}$$

145. Der Druck in beyden Röhren verhält sich wie die Oberflächen der Wassersäulen, das ist, wie die Quadrate der Durchmesser der Röhren. Ist also der aufwärts gehende Druck in dem kürzern Schenkel = x, so hat man die Proportion $\left(\frac{3}{4}\right)^2 : 12^2 = 25 : x$; woraus x = 6400 Pf. folgt.

146. Es sey das Gewicht x; also der Druck desselben auf die Wassersäule in der engen Röhre = 20x; und dieser verhält sich zu dem Druck der Wassersäule in der weiten Röhre aufwärts, wie $\frac{1}{4} : 81$. Es ist also $\frac{1}{4} : 81 = 20x : 100000$; woraus sich $x = 15\frac{35}{81}$ Pf. ergiebt.

Diese Verbindung stellt das Wesentliche der hydraulischen Presse dar, bey welcher durch eine mäßige Kraft eine sehr große Wirkung hervorgebracht werden kann. Indessen kommt bey dieser noch das Hinderniß der Reibung in Betrachtung, durch welches die Wirkung ein Beträchtliches vermindert wird.

147. Ein Gewicht von 30 Pf. übt an einem solchen Hebel einen Druck von 360 Pf. aus. Ist nun das Verhältniß des Durchmessers der engen Röhre zu dem der weiten, wie 1 : x, so ist das Verhältniß des Drucks in beyden Röhren, wie $1^2 : x^2$; folglich $1^2 : x^2 = 360 : 36000$; woraus sich das gesuchte Verhältniß der Durchmesser wie 1 : 10 ergiebt.

148. Da der körperliche Inhalt des Gefäßes 336 Cubikzoll beträgt, so ist der Druck des Wassers gegen den Boden dem Gewicht von so viel Cubikzollen Wasser gleich d. i. = 14 Pf. 15 Lth. $1\frac{1}{4}$ Qu.

149. Der Druck des Wassers gegen eine Seitenwand von 7 Zoll Breite und 8 Zoll Höhe ist dem Gewicht eines

dreyseitigen Wasserprisma's gleich, dessen Grundfläche $= \frac{8 . 8}{2}$ $= 32$ Quadratzoll, und Höhe 7 Zoll; folglich körperlicher Inhalt $= 224$ Cubikz. ist. (S. mein Lehrb. der Physik. 5te Aufl. §. 116.) Gegen eine Seitenwand von 6 Zoll Breite ist er dem Gewicht eines Wasserprisma's von 32 Quadratzoll Grundfläche und 6 Zoll Höhe, d. i. von 192 Cubikzoll körperlichem Inhalt gleich. Folglich ist der gesammte Druck auf alle 4 Seiten, dem Gewicht von 832 Cubikz. Wasser gleich, d. i. $= 35$ Pf. 27. Lth. 2 Qu. beynahe.

150. Es sey die Seite des kubischen Gefäßes $= x$ Zoll; dann ist der gesammte Druck des Wassers auf den Boden und die Seitenwände dem Gewicht von $3x^3$ Cubikzoll Wasser gleich. (S. mein Lehrb. d. Physf. ebendas.) Der angegebene Druck ist $= 723765$ Gran. Dividirt man diese durch 330,94, so findet sich, wie viel Cubikzolle sie betragen. Dividirt man diese Anzahl noch durch 3 und zieht aus dem Quotienten die Cubikwurzel, so erhält man $x = 9$ Zoll. Mit Hülfe der Logarithmen ist die Rechnung leicht gemacht.

151. Es sey die Höhe des Gefäßes $= x$, so ist der Druck gegen eine Seitenwand von 8 Zoll Breite $=$ dem Gewicht eines Wasserprisma's von $\frac{x^2}{2} . 8$ Cubikzoll Inhalt (Nr. 149.); und gegen die Seitenwand von 5 Zoll Breite $=$ einem Wasserprisma von $\frac{x^2}{2}$ 5 Cubikzoll Inhalt. Folglich ist der gesammte Druck auf alle 4 Seiten dem Gewicht von $8x^2 + 5x^2 = 13x^2$ Cubikzoll Wasser gleich. Man verwandele also das gegebene Gewicht in Grane, und dividire die Anzahl derselben durch 330,94; dadurch erhält man die Anzahl der Cubikzolle Wasser, die $= 13x^2$ ist. Wird also diese noch durch 13 dividirt, und aus dem Quotienten die Quadratwurzel gezogen, so findet sich $x = 10$ Zoll.

152. Der Druck gegen die krumme Fläche ist eben so groß, als gegen eine ebene Seitenfläche von gleicher Grund-

linie und gleicher Höhe. Er ist daher gleich dem Gewicht eines Wasserprisma's von $\frac{15 \,.\, 15}{2} \,.\, 12\pi = 4241{,}15$ Cubikzoll Inhalt, welches $182\frac{3}{4}$ Pfund ausmacht.

153. Es sey der Durchmesser des Gefäßes $= 2r$, so ist der Druck des Wassers gegen den Boden $=$ dem Gewicht von $7r^2\pi$ Cubikzoll Wasser, und gegen die Seitenwand $= 49r\pi$. Man erhält also die Gleichung $7r^2\pi + 49r\pi = 522\frac{1}{4} = \frac{2089}{4}$; und $r^2 + \frac{49\pi}{7\pi}r = \frac{2089}{4\,.\,7\,.\,\pi}$; folglich $r^2 + 7r + \frac{49}{4} = \frac{2089}{28\pi} + \frac{49}{4} = \frac{2089 + 343\pi}{28\pi}$; und $r + \frac{7}{2} = \sqrt{\frac{3166{,}56\,..}{28\,\pi}}$; woraus sich r sehr nahe $= 2\frac{1}{2}$, und der Durchmesser des Gefäßes $= 5$ Zoll ergiebt.

154. Was die erste Frage betrifft, so findet sie ihre Beantwortung durch Berechnung des körperlichen Inhalts einer abgestumpften Pyramide. (S. mein Lehrb. der reinen Math. 6te Aufl. §. 264.) Der Abstand beyder Grundflächen von einander ergiebt sich leicht aus einem senkrechten Durchschnitt der Pyramide. Dieser ist ein Trapezium ABCD (Fig. 18.), worin $AB = 1$, $CD = 3$, $BD = 4$ ist. Zieht man BE senkrecht zwischen den parallelen Seiten, so ist dieses die Höhe der abgestumpften Pyramide, und sie ist $= \sqrt{(BD^2 - DE^2)} = \sqrt{(16 - 1)} = \sqrt{15}$. Der Inhalt der abgestumpften Pyramide ist hiernach $= \frac{1}{3}\sqrt{15}[9 + 1 + \sqrt{(1.9)}] = \frac{1}{3}\sqrt{15} \,.\, 13 = 16{,}78\,..$ Cubikzoll.

2) Der Druck gegen den Boden ist gleich dem Gewicht eines Wasserprisma's, dessen Grundfläche 1 Quadratzoll, und Höhe $= \sqrt{15}$ Zoll ist, also $=$ dem Gewicht von $3{,}87\,..$ Cubikzoll Wasser $= 5{,}340\,..$ Loth.

3) Der Druck gegen eine Seitenwand ist dem Gewicht eines Wasserprisma's gleich, dessen Grundfläche gleich der

Seitenwand, und dessen Höhe dem Abstand des Schwerpunktes der Seitenwand von der Oberfläche des Wassers in dem Gefäße ist.

Der Beweis dieses Satzes findet sich unter andern in Bürja's Hydrostatik S. 30 ff., ingleichen in Brandes Lehrb. der Gesetze des Gleichgewichts 1r Th. S. 184.

Der Flächeninhalt einer Seitenwand beträgt hier 8 Quadratzoll. Der Schwerpunkt derselben liegt $1\frac{2}{3}$ Zoll von der obern Seite, welches $\frac{5}{12}$ des Abstandes beyder parallelen Seiten ausmacht; und eben so macht der Abstand des Schwerpunkts von der Oberfläche des Wassers $\frac{5}{12}$ der ganzen Höhe des Gefäßes, d. i. $\frac{5}{12} \cdot \sqrt{15}$ Zoll. Hiernach ist der Druck des Wassers auf 1 Seitenwand = dem Gewicht von $8 . \frac{5}{12} . \sqrt{15} = 12{,}9099..$ Cubikzoll, und auf alle 4 Seiten = dem Gewicht von 51,639... Cubikz. Wasser = 2 Pf. $7\frac{1}{5}$ Lth.

Der Druck auf eine Seitenwand läßt sich auch dadurch finden, daß man dieselbe sich in lauter unendlich schmale Schichten getheilt denkt (auf eben die Art, wie es in meinem Lehrbuch der Phys. §. 116. angegeben ist); der Druck auf eine jede dieser Schichten ist dem Gewicht eines Wasserprisma's gleich, dessen Grundfläche dieser Schicht, und dessen Höhe der Tiefe der Schicht unter der Oberfläche des Wassers gleich ist. Alle diese Prismen zusammen machen einen von 5 Ebenen eingeschlossenen Körper aus, dessen Grundfläche, ABCD, (Fig. 19.), der Seitenwand des Gefäßes gleich ist; dessen Rückseite, ABFE, ein Rechteck ist, dessen Grundlinie, AB, der Grundlinie der Seitenwand, und dessen Höhe der Höhe des Wasserstandes in dem Gefäß gleich ist. Die schräge Fläche, EFCD, ist ein Trapezium, dessen parallele Seiten, den parallelen Seiten der Seitenwand gleich, die andern beiden, FC und ED, aber die Hypotenusen der rechtwinkligen Drey-

ecke, FBC und EAD, sind. Diese Dreyecke, die einander als gleich und ähnlich gedacht werden müssen, machen die beyden noch übrigen Seiten des Körpers aus.

Dieser Körper läßt sich durch zwey Ebenen, von denen die eine durch FB, die andere durch EA, senkrecht gegen CD, gelegt wird, in zwey dreyseitige Pyramiden, BGCF und AHDE, und ein dreyseitiges Prisma, das zwischen den Grundflächen, BFG und AEH, eingeschlossen ist, zerlegen. Der Inhalt einer jeden der beyden Pyramiden ist $= \frac{2}{3}\sqrt{15}$; und der Inhalt des Prisma's $= \frac{4 . \sqrt{15} . 1}{2} = 2\sqrt{15}$. Also der Inhalt des ganzen Körpers $= 2 . \frac{2}{3}\sqrt{15} + 2\sqrt{15}$ $= \frac{10}{3}\sqrt{15} = 12{,}9099$ Cubikzoll — eben so viel, als die obige Rechnung für den Druck auf eine Seitenwand giebt.

155. Der Druck gegen den Boden ist jetzt dem Gewicht von $9 . \sqrt{15} = 34{,}856$.. Cubikz. und gegen eine Seitenwand von $8 . \frac{7}{12}\sqrt{15} = 18{,}0738$.. und gegen alle 4 Wände von 72,295 ... Cubikz. Wasser gleich.

156. Der körperliche Inhalt des abgestumpften Kegels findet sich $= 102{,}62$ .. Cubikzoll. (S. mein Lehrb. d. reinen Math. §. 271.) Der Druck gegen den Boden ist dem Gewicht einer Wassersäule gleich, deren Grundfläche dem Boden des Gefäßes, und deren Höhe der Höhe des Wasserstandes in demselben gleich ist. Der Inhalt einer solchen Säule ist $= \frac{9}{4} . \pi . 8 = 18\pi = 56{,}548$ ... Cubikzoll. Der Druck gegen die Seitenwand ist dem Gewicht eines Wasserprisma's gleich, dessen Grundfläche dem Flächeninhalt derselben, und dessen Höhe dem Abstand ihres Schwerpunktes von der Oberfläche des Wassers gleich ist. Die krumme Oberfläche des abgestumpften Kegels beträgt 101,313 .. Quadratzolle. (S.

d. angef. Lehrb. §. 275.) Der Schwerpunkt der krummen Oberfläche des abgestumpften geraden Kegels liegt hier $\frac{11}{24} \cdot 8 = \frac{11}{3}$ Zoll von der obern Wasserfläche. Folglich ist der Inhalt des Wasserprisma's $= 101{,}313 \cdot \frac{11}{3} = 371{,}48\ldots$ Cubikzoll.

Ist der Halbmesser der Grundfläche eines abgestumpften geraden Kegels $= R$, der der obern Fläche $= r$; der Abstand beyder $= h$, so liegt der Schwerpunkt der krummen Oberfläche in der Achse des Kegels in einem Abstande $= \frac{R + 2r}{3(R + r)} \cdot h$ von der Grundfläche. Den Beweis davon muß man in den ausführlichern Lehrbüchern der Statik suchen. Vergl. auch das Gehlersche Neue physikal. Wörterbuch, Art. Schwerpunkt.

157. Auch hier gilt das obige Gesetz, daß der Druck auf die Kugelfläche dem Gewicht eines Wasserprismas gleich ist, dessen Grundfläche der Oberfläche der Kugel an Größe gleich, und dessen Höhe so groß als der Abstand des Schwerpunktes der Kugelfläche von dem höchsten Punkt der Wasserkugel ist. Die Oberfläche der Kugel aber beträgt $4 \cdot 3^2 \pi = 113{,}097\ldots$ Quadratzoll. Der Schwerpunkt derselben liegt im Mittelpunkt der Kugel; folglich ist der Abstand desselben vom höchsten Punkt der Kugel dem Halbmesser gleich; daher der Inhalt des Wasserprisma's $= 3 \cdot 113{,}097 = 339{,}291\ldots$ Cubikzolle.

Die in der Kugel enthaltene Wassermenge ist $= 36\pi = 113{,}097\ldots$ Cubikz., folglich der Druck gegen die innere Fläche 3mal so groß, als das Gewicht der Wassermenge selbst. Dasselbe Verhältniß findet bey jeder mit Wasser gefüllten Kugel statt.

Auch bey einem hohlen mit Wasser gefüllten Würfel ist der Druck gegen den Boden und die Seitenwände dreymal so groß, als das Gewicht des Wassers.

158. Der Schwerpunkt der als schwer angenommenen Oberfläche einer Halbkugel liegt in der Mitte des auf der

Grundfläche senkrechten Halbmessers der Kugel; folglich ist der Druck des Wassers auf die Oberfläche der untern Halbkugel gleich dem Gewicht eines Wasserprisma's, dessen Grundfläche so groß als die Oberfläche, und dessen Höhe $1\frac{1}{2}$mal so groß als der Halbmesser der Kugel ist. Der Druck auf die Oberfläche der obern Halbkugel ist dem Gewicht eines Wasserprisma's von gleicher Grundfläche mit jenem, aber einer nur $\frac{1}{3}$ so großen Höhe gleich. Folglich ist der Druck auf die Oberfläche der untern Halbkugel dreymal so groß, als der auf die Oberfläche der obern. Jener beträgt hier so viel als das Gewicht von 254,46.. Cubikz., dieser so viel als das Gewicht von 84,82.. Cubikz. Wasser.

159. In diesem Fall ist der Abstand des Schwerpunktes von der Oberfläche des Wassers nur dem halben Radius gleich, und daher der Druck gegen die innere Fläche nur $\frac{1}{3}$ so groß, als bey voller Kugel d. i. = dem Gewicht von 84,82... Cubikz. Wasser.

160. Wird der Halbmesser einer mit Wasser gefüllten Kugel $= r$ gesetzt, so ist der Druck auf die innere Fläche der Kugel = dem Gewicht von $4r^3\pi$ Cubikmaaßen; also hier $4r^3\pi = 1000$. Folglich $r = \sqrt[3]{\frac{1000}{4\pi}} = 4{,}301$; und der Durchmesser = 8,602.. Zoll.

161. Der Flächeninhalt der Zone ist = 32,838.. Quadratzoll. Der Schwerpunkt einer Zone liegt jederzeit in der Mitte ihrer Höhe oder Breite, und fällt also hier in den Mittelpunkt der Kugel; folglich ist der Abstand desselben von dem höchsten Punkt der Wasserkugel = dem Halbmesser. Daher der Druck gegen die Zone gleich dem Gewicht von 5.32,838.. = 164,190.. Cubikzoll Wasser.

162. Der Abstand vom Mittelpunkt der Kugel kann auf eine doppelte Weise genommen werden: entweder liegt

dieser einen Zoll unter, oder über der genannten Fläche. Im ersten Fall fällt die Zone ganz in die obere Halbkugel; im zweyten kann sie ganz oder zum Theil in der untern Halbkugel liegen.

Es sey die Breite der Zone x; dann ist der Flächeninhalt derselben $= 10\pi x$. Der Schwerpunkt derselben liegt in der Mitte ihrer Breite, und ist folglich von dem höchsten Punkt der Wasserkugel $(4 - \frac{1}{2}x)$ Zoll entfernt. Der Druck des Wassers gegen die innere Fläche der Zone ist daher dem Gewicht von $10\pi x\ (4 - \frac{1}{2}x)$ Cubikzoll Wasser gleich. Man erhält also die Gleichung $10\pi x\ (4 - \frac{1}{2}x) = 180$; woraus sich ergiebt $x - 4 = \pm\sqrt{\frac{16\pi - 36}{\pi}} = \pm 2{,}1309\ldots$ und $x = 4 \pm 2{,}1309$. Der positive Werth der Wurzel gilt hier nicht, weil sonst die Breite der Zone größer als der Halbmesser wäre, und doch der Mittelpunkt der Kugel unter der untern Fläche der Zone liegen soll. Der negative Werth aber giebt die Breite $= 1{,}869\ldots$ Zoll.

Im zweyten Fall, wenn der Mittelpunkt der Kugel 1 Zoll über der untern Fläche der Zone liegt, ist der Abstand des Schwerpunktes der Zone vom höchsten Punkt der Wasserkugel $= 6 - \frac{1}{2}x$; und die Gleichung wird jetzt $10\pi x (6 - \frac{1}{2}x) = 180$, woraus sich ergiebt $x - 6 = \pm 6\sqrt{\frac{\pi - 1}{\pi}} = \pm 4{,}9538$; und $x = 6 - 4{,}9538 = 1{,}046\ldots$

Die positiven Werthe von x geben zwar auch zum Produkt 180, und thun folglich der Gleichung Genüge, passen aber nicht zur Bezeichnung einer Zone.

163. Es sey der gesuchte Abstand $= x$, so ist der Abstand des Schwerpunktes der Zone vom höchsten Punkt der Halbkugel $= 7 - \left(x + \frac{2{,}8699}{2}\right) = 7 - (x + 1{,}4349)$. Der Flächeninhalt der Zone ist $= 14\pi . 2{,}8699$. Daher die Gleichung $14\pi . 2{,}8699\ (7 - (x + 1{,}4349)) = 450$; woraus sich ergiebt

$$x = \frac{98\pi . 2,8699 - 450}{14\pi . 2,8699} - 1,4349 = 5,5650 - 3,5650 = 2.$$

164. Der Flächeninhalt der Zone ist $= 2r\pi h$; der Abstand ihres Schwerpunktes vom höchsten Punkt der Wasserkugel $= r \pm (a \mp \frac{1}{2}h)$. Folglich ist $D = 2r\pi h\,[r \pm (a \mp \frac{1}{2}h)]$; wobey die oberen Zeichen gelten, wenn der Mittelpunkt der Kugel über der untern Fläche, und die untern, wenn er unter derselben liegt.

165. Die Gleichung für D bey der vorigen Aufgabe giebt für diese Aufgabe $h = r \pm a - \sqrt{\left[(r \pm a)^2 - \frac{D}{r\pi}\right]}$.

166. Liegt der Mittelpunkt über der untern Fläche der Zone, so ist $a = \frac{D}{2r\pi h} - (r - \frac{1}{2}h)$; liegt er unter derselben, so ist $a = (r - \frac{1}{2}h) - \frac{D}{2r\pi h}$.

167. Es ist dazu erforderlich, daß die Menge der in dem Rezipienten enthaltenen Luft verdoppelt werde, und hierzu bedarf es 15 Kolbenstöße.

168. Durch 24 Kolbenstöße werden 192 Cubikzoll Luft in den Rezipienten gebracht, wodurch eine Verdichtung in dem Verhältniß von 120 : 312 d. i. von $2\frac{3}{5}$mal entsteht.

169. Der Rezipient enthalte x Cubikzolle Luft; durch 40 Kolbenstöße kommen noch 320 Cubikzolle hinzu, wodurch eine Verdichtung von $\frac{x + 320}{x} = 1 + \frac{320}{x}$ entsteht; und dieß soll $= 3\frac{3}{4}$ seyn. Folglich ist $\frac{320}{x} = 2\frac{3}{4}$; woraus $x = 116\frac{4}{11}$ Cubikzoll folgt.

170. Es verhält sich $d : D = V : V + nv$; folglich ist $D = \frac{V + nv}{V}\, d$.

171. Hat die Luft in dem Rezipienten schon eine Dich=

tigkeit $= \frac{p}{q}d$, so ist es eben so viel, als ob statt des einfachen Volumens V, in demselben $\frac{p}{q}V$ an Luft enthalten wären; und man erhält die Proportion $V : \frac{p}{q}V + nv = d : D$; folglich $D = \frac{pV + nqv}{qV}d$.

172. Wenn die Luft des Rezipienten sich bei dem ersten Kolbenzuge durch 325 Cubikzoll ausbreitet, so wird sie dadurch in dem Verhältniß von 300 : 325 verdünnt, oder, ihre jetzige Dichtigkeit beträgt nur $\frac{300}{325}$ der anfänglichen Dichtigkeit. Ist diese $= d$, so sey $\frac{300}{325} d = d_1$. Durch den zweyten Kolbenzug wird hinwiederum die Dichtigkeit d_1 in demselben Verhältniß vermindert, oder, es entsteht eine Dichtigkeit $= \frac{300}{325} d_1$, welches $= \left(\frac{300}{325}\right)^2 d$ ist. Man setze dieß $= d_2$, so entsteht durch den dritten Kolbenzug eine Dichtigkeit $= \frac{300}{325} d_2 = \left(\frac{300}{325}\right)^3 d$. Auf diese Weise läßt sich weiter schließen, daß nach dem 12ten Kolbenzuge eine Dichtigkeit $= \left(\frac{300}{325}\right)^{12} d \doteq 0{,}382 .. d$ entsteht, oder daß die Luft unter dem Rezipienten beynahe bis auf $\frac{3}{8}$ der ursprünglichen Dichtigkeit verdünnt ist.

173. Durch ähnliche Schlüsse, wie bey der vorhergehenden Aufgabe, ergiebt sich, daß $d_n = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n d$ ist.

Es wird bey dieser Bestimmung nicht auf den schädlichen Raum zwischen dem niedergestoßenen Kolben und dem Hahn, bey einer Luftpumpe mit Hähnen, Rücksicht genommen.

Da es überhaupt große Schwierigkeit hat, die Größen V und v genau zu ermitteln, so darf man keine genaue Uebereinstimmung zwischen der durch die Rechnung gefundenen und der in der Wirklichkeit statt findenden Dichtigkeit erwarten.

174. Es sey die gesuchte Anzahl der Kolbenzüge $= n$, so soll $\left(\frac{450}{480}\right)^n = \frac{1}{10}$ seyn. Folglich ist $n = \frac{\log 10}{\log 480 - \log 450}$ $= \frac{1}{0{,}028} = \frac{1000}{28} = 36$ beynahe.

175. Es sey der schädliche Raum $= s$. Dieser füllt sich nach dem Niederstoßen des Kolbens jedesmal mit Luft von der Dichtigkeit der äußern, also $= d$. Bezeichnet man nun die Dichtigkeit in dem Rezipienten nach dem 1sten, 2ten, 3ten ... nten Kolbenzuge durch d_1, d_2, d_3 ... d_n, so ist nach dem ersten Kolbenzuge $d : d_1 = V + v + s : V + s$; folglich $d_1 = \frac{V+s}{V+v+s} d$.

Bey dem zweyten Kolbenzuge vertheilt sich die Luft in dem Rezipienten und die in dem schädlichen Raum durch den Rezipienten, den schädlichen Raum, und den Stiefel d. i. durch V, s und v. Es ist daher

$$d_2 = \frac{Vd_1 + sd}{V+v+s} = \frac{V.(V+s)d}{(V+v+s)^2} + \frac{sd}{V+v+s}.$$

Nach dem dritten Kolbenzuge ist die Dichtigkeit

$$d_3 = \frac{Vd_2 + sd}{V+v+s} = \frac{V}{V+v+s}\left[\frac{V.(V+s)}{(V+v+s)^2} + \frac{s}{V+v+s}\right]d + \frac{s}{V+v+s}\,d.$$

$$= \left[\frac{V^2(V+s)}{(V+v+s)^3} + \frac{Vs}{(V+v+s)^2} + \frac{s}{V+v+s}\right]d.$$

Nach dem vierten Kolbenzuge ist

$$d_4 = \frac{Vd_3 + sd}{V+v+s} = \frac{V}{V+v+s}\left[\frac{V^2(V+s)}{(V+v+s)^3} + \frac{Vs}{(V+v+s)^2} + \frac{s}{V+v+s}\right]d + \frac{s}{V+v+s}\,d.$$

$$= \left[\frac{V^3(V+s)}{(V+v+s)^4} + \frac{V^2 s}{(V+v+s)^3} + \frac{Vs}{(V+v+s)^2} + \frac{s}{V+v+s}\right]d.$$

$$= \left[\frac{V^4}{(V+v+s)^4} + \frac{V^3 s}{(V+v+s)^4} + \frac{V^2 s}{(V+v+s)^3} + \frac{Vs}{(V+v+s)^2} + \frac{s}{V+v+s}\right]d.$$

$$= \frac{s}{V+v+s}\left[1 + \frac{V}{V+v+s} + \frac{V^2}{(V+v+s)^2} + \frac{V^3}{(V+v+s)^3}\right]d + \frac{V^4}{(V+v+s)^4}\,d.$$

Hieraus ergiebt sich die Gestalt der Reihe zur Genüge, und man erhält

$$d_n = \frac{s}{V+v+s}\left[1 + \frac{V}{V+v+s} + \frac{V^2}{(V+v+s)^2} + \dots + \frac{V^{n-1}}{(V+v+s)^{n-1}}\right]d + \frac{V^n}{(V+v+s)^n}\,d.$$

Die in Parenthese eingeschlossene Reihe ist eine geometrische, deren erstes Glied $= 1$, Exponent $= \frac{V}{V + v + s}$, und Anzahl der Glieder $= n$ ist. Folglich ist die Summe derselben $= \left[1 - \frac{V^n}{(V + v + s)^n}\right] : \left[1 - \frac{V}{V + v + s}\right]$

$$= \left[1 - \frac{V^n}{(V + v + s^n)}\right] : \frac{V + s}{V + v + s} = \left[1 - \frac{V^n}{(V + v + s^n)}\right] . \frac{V + v + s}{V + s}.$$

Wird dieses Produkt noch mit dem außerhalb der obigen Reihe stehenden Faktor $\frac{s}{V + v + s}$ multiplizirt, so erhält man $\left[1 - \frac{V^n}{(V + v + s)^n}\right] . \frac{s}{v + s}$; und wird hierzu noch das außerhalb der geometrischen Reihe stehende Glied $\frac{V^n}{(V + v + s)^n}$ addirt, so erhält man

$$d_n = \left[\frac{s}{v + s} - \frac{s}{v + s} . \frac{V^n}{(V + v + s)^n} + \frac{V^n}{(V + v + s)^n}\right] d$$

$$= \left[\frac{s}{v + s} + \left(1 - \frac{s}{v + s}\right) . \frac{V^n}{(V + v + s)^n}\right] d$$

$$= \left(\frac{s}{v + s} + \frac{v}{v + s} . \frac{V^n}{(V + v + s)^n}\right) d.$$

und dieß ist in der That ein einfacher Ausdruck für einen dem Ansehen nach verwickelten Gegenstand. Gewährt daher auch die Anwendung dieser Formel keine große Zuverlässigkeit, so ist doch die Entwickelung derselben eine nützliche Uebung für den Anfänger.

176. Das Gewicht eines Cubikzolles Eisen ist $= 330{,}94 \times 7{,}207 = 2385{,}08$ Gran; 2 Pfund machen 15360 Gran; diese Zahl dividirt durch das Gewicht eines Cubikzolles Eisen, giebt 6,440 Cubikzoll als das Volumen der Kugel. Jeder Cubikzoll Eisen aber verliert im Wasser 330,94 Gran an seinem Gewicht; folglich ist der Gewichtsverlust der ganzen Kugel im Wasser $= 6{,}440 . 330{,}94 = 2131{,}2$ Gran $=$ 8 Loth 3 Qu. 31,2 Gran; und sie sinkt

mit einer Kraft von 1 Pf. 23 Loth 0 Qu. 28,8 Gr. zu Boden.

Noch kürzer läßt sich der Verlust der Kugel im Wasser durch die Betrachtung finden, daß ein gleiches Volumen Wasser im Verhältniß seiner geringern spezifischen Schwere weniger wiegen müsse. Dieses Gewicht ergiebt sich durch die Proportion 7,207 : 1 = 2 Pf. : $\frac{2}{7,207}$ Pf. und diesem Gewicht ist der Verlust der Kugel gleich.

177. Der Gewichtsverlust des Bleyes ist = $\frac{5}{11,389}$ Pf. = 14 Lth. 11,67 . . Gr.

178. Soll das Kupfer $\frac{1}{4}$ Pf. im Wasser verlieren, so muß es selbst 8,897 . $\frac{1}{4}$ Pf. = 2,224 Pf. = 2 Pf. 7 Lth. 40 Gr. wiegen. Sein Volumen muß dem Volumen von $\frac{1}{4}$ Pf. Wasser gleich seyn d. i. = $\frac{7680}{4 \,.\, 330,94}$ = 5,80 . . Cubikz.

179. Eine Masse Wasser von gleichem Volumen mit dem zweypfündigen Stück Korkholz muß in dem Verhältniß von 0,240 : 1 mehr wiegen, als dieses. Man findet also durch die Proportion 0,240 : 1 = 2 : x, das Gewicht des Wassers x = 8$\frac{1}{3}$ Pf. Folglich ist die Kraft, mit welcher das Korkholz aufwärts getrieben wird, = 6$\frac{1}{3}$ Pf.

180. Die Frage ist: wie viel Cubikzoll Wasser sind dem Gewicht von 600 Cubikzoll Tannenholz gleich? Dieß findet sich durch die Proportion 1 : 0,550 = 600 : x; also x = 330; und so tief taucht sich das Holz ins Wasser; folglich ragen 270 Cubikz. desselben hervor.

181. Es sey die Anzahl der Cubikzolle Bley, die mit dem Holz verbunden werden soll, = x, so muß das Gewicht von 600 Cubikz. Holz und das von x Cubikz. Bley zusammen genommen dem Gewicht von 600 + x Cubikz. Wasser gleich seyn. Man erhält daher die Gleichung 0,550 . 600 + 11,389 x = 600 + x; und hieraus

$x = \frac{600 \,.\, 0{,}45}{10{,}389} = 25{,}989 \ldots$ Cubikz. Das Gewicht von x Cubikz. Bley ist $= \frac{11{,}389 \,.\, 330{,}94 \,.\, 25{,}989}{7680} = 12{,}754 \ldots$ Pfund.

182. Es sey die Seite des Würfels $= x$ Zoll, so ist das Gewicht desselben $= x^3 \,.\, 330{,}94 \,.\, 0{,}550$ Gran. Hierzu das Gewicht von $3\frac{1}{4}$ Pf. oder 24960 Gran giebt das Gewicht, welches ein Volumen Wasser, gleich dem des Würfels und des Bleyes haben muß. Das Volumen von 3 Pf. Bley ist $= \frac{23040}{11{,}389 \,.\, 330{,}94} = 6{,}1129$ Cubikz. Also ist $0{,}550 \,.\, 330{,}94 \,.\, x^3 + 24960 = (x^3 + 6{,}1129) \,.\, 330{,}94$. Folglich $330{,}94\, x^3 (1 - 0{,}550) = 24960 - 2023 = 22937$ und

$$x = \sqrt[3]{\frac{22937}{0{,}45 \,.\, 330{,}94}} = 5{,}360 \ldots \text{ Zoll.}$$

183. Die Kugel muß ein Volumen gleich dem eines halben Pfundes Wasser bekommen. Das Volumen eines halben Pfundes Wasser ist $= \frac{7680}{2 \,.\, 330{,}94} = \frac{3840}{330{,}94}$ Cubikzoll. Wird also der Halbmesser der Kugel $= r$ gesetzt, so muß $\frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{3840}{330{,}94}$ seyn; woraus sich $r = \sqrt[3]{\frac{3 \,.\, 3840}{330{,}94 \,.\, 4 \,.\, \pi}} = 1{,}4044 \ldots$ Zoll ergiebt.

Das Volumen eines halben Pfundes Kupfer ist $= \frac{3840}{8{,}897 \,.\, 330{,}94}$. Folglich ist das Volumen des hohlen Raumes der Kugel $= \frac{3840}{330{,}94} - \frac{3840}{8{,}897 \,.\, 330{,}94} = \frac{3840}{330{,}94}\left(1 - \frac{1}{8{,}897}\right) = \frac{3840 \,.\, 7{,}897}{330{,}94 \,.\, 8{,}897}$; und dieses $= \frac{4}{3} \varrho^3 \pi$, wenn ϱ der Halbmesser des hohlen Raumes ist. Daraus ergiebt sich

$$\varrho = \sqrt[3]{\frac{3 \,.\, 3840 \,.\, 7{,}897}{4 \,.\, \pi \,.\, 330{,}94 \,.\, 8{,}897}} = 1{,}3497 \,..$$

Die Dicke des Kupfers ist $= r - \varrho = 0{,}0547\,..$ Zoll $= 0{,}66$ Lin.

184. Das Gewicht einer Quecksilber-Kugel von gleichem Volumen mit der eisernen ist $= \frac{13598}{7788} \,.\, 6 = 10{,}476\,..$ Pf. Folglich wird die eiserne mit einer Kraft von 4,476.. Pf. von dem Quecksilber in die Höhe getrieben.

185. Das absolute Gewicht eines gleichen Volumens Wasser mit dem des Körpers A ist $= \frac{P}{S}$; und das eines gleichen Volumens mit dem des Körpers B ist $= \frac{p}{s}$. Beyde zusammen müssen den Gewichten der beyden Körper gleich seyn. Also $\frac{P}{S} + \frac{p}{s} = P + p$. Hieraus ergiebt sich

$$p = \frac{Ps}{S} \,.\, \frac{S - 1}{1 - s}.$$

186. Aus der Gleichung bey der vorigen Aufgabe ergiebt sich $P = \frac{pS}{s} \,.\, \frac{1 - s}{S - 1}$.

187. Man setze das zur Einheit angenommene Volumen (z. B. Cubikzoll) $= 1$; ingleichen das Gewicht eines solchen Volumens Wasser $= 1$; alsdann ist das absolute Gewicht des Körpers $A = VS$; das des Körpers $B = vs$; und das einer dem Volumen nach gleichen Menge Wasser $= V + v$. Man erhält also die Gleichung $VS + vs = V + v$; woraus sich $v = \frac{S - 1}{1 - s} V$ ergiebt.

188. Ist P in Granen gegeben und wird v in Cubikzollen gesucht, so ist $V = \frac{P}{S \,.\, 330{,}94}$. Folglich ist

$$v = \frac{S - 1}{1 - s} \,.\, \frac{P}{S \,.\, 330{,}94}.$$

Wird statt der Cubikzolle ein anderes Maaß zur Ein-

heit genommen, dessen Gewicht Wasser = a ist, so ist
$v = \frac{S-1}{1-s} \cdot \frac{P}{aS}$.

189. Die Gewichte P, p, q müssen in derselben Gewichtseinheit ausgedrückt seyn, in welcher das Gewicht a der zur Einheit angenommenen Wassermasse bestimmt ist. Alsdann ist das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser mit dem des Körpers A $= \frac{P}{S}$; und das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser mit dem des Körpers B $= \frac{p}{s}$. Dadurch entsteht die Gleichung $\frac{P}{S} + \frac{p}{s} = P + p \pm q$; und hieraus $p = \frac{(P \pm q) S - P}{S} \cdot \frac{s}{1-s}$; wobey das Zeichen + für den Fall des Aufsteigens; das Zeichen — für den des Niedersinkens gilt.

Ist V gegeben und v gesucht, so ist $v = \frac{Va(S-1) \pm q}{a(1-s)}$.

190. Es sey das Gewicht des Bleyes = P; alsdann ist das Gewicht eines gleichgroßen Volumens Wasser $= \frac{P}{11,389}$. Ferner wiegen 800 Cubikzoll Tannenholz 800 . 0,550 . 330,94 Gran und 800 Cubikzoll Wasser 800 . 330,94 Gran; $\frac{1}{8}$ Pf. aber machen 960 Gran. Man erhält daher die Gleichung

$$P + 800 \cdot 0,550 \cdot 330,94 + 960 = \frac{P}{11,389} + 800 \cdot 330,94.$$

Hieraus ergiebt sich

$$P - \frac{P}{11,389} = 800 \cdot 330,94\ (1 - 0,550) - 960 \text{ d. i.}$$

$$\frac{10,389}{11,389} P = 800 \cdot 330,94 \cdot 0,450 - 960 = 118178 \text{ Gr.}$$

$$\text{und } P = \frac{118178 \cdot 11,389}{10,389} = 129553 \text{ Gr.} = 16 \text{ Pf. } 27 \text{ Lth.}$$

3 Q. 13 Gr.

191. Es sey die Anzahl der Cubikmaaße Wasser, deren Gewicht dem des Metalles gleich ist, $= x$, so ist $ax = P$; folglich $x = \frac{P}{a}$; und da die Kugel an Größe x Cubikmaaßen gleich seyn soll, so ist $\frac{P}{a} = \frac{4}{3}r^3\pi$; woraus sich $r = \sqrt[3]{\frac{3P}{4\pi a}}$ ergiebt.

Das Volumen der Metallmasse, in dem zur Einheit angenommenen Cubikmaaße ausgedrückt, ist $= \frac{P}{aS}$. Folglich ist der hohle Raum der Kugel $= \frac{P}{a} - \frac{P}{aS} = \frac{P}{a}\left(1 - \frac{1}{S}\right)$ $= \frac{P}{a} \cdot \frac{S-1}{S} = \frac{4}{3}\varrho^3\pi$; woraus man $\varrho = \sqrt[3]{\frac{3P}{4\pi a} \cdot \frac{S-1}{S}}$ erhält.

Die Dicke des Metalls ist $= r - \varrho = \left(1 - \sqrt[3]{\frac{S-1}{S}}\right) \cdot \sqrt[3]{\frac{3P}{4\pi a}}$.

192. Es sey die Menge des in der Mischung enthaltenen Zinns $= x$; die des Bleyes $= y$; alsdann ist 1) $x + y = 7$. Ferner ist $1 : x = 1053\frac{1}{2} : 1053\frac{1}{2}x$; und $1 : y = 674\frac{1}{3} : 674\frac{1}{3}y$. Also ist 2) $1053\frac{1}{2}\,x + 674\frac{1}{3}\,y = 6237$. Aus Nr. 1 und 2. ergiebt sich $x = 4$; $y = 3$ Pf.

193. Hier ist 1) $x + y = 7920$; 2) $\frac{55,23\,x}{576} + \frac{60,69\,y}{540} = 795,11$. Aus beyden Gleichungen findet sich
$x = 5757,2$ Gr. $= 24$ Loth beynahe; $y = 2162,8$ Gr. etwas über 9 Lth.

Die allgemeine Auflösung dieser Aufgabe s. in meinem Lehrbuch der reinen Math. S. 236 f., ingl. in dem Lehrb. der Physik S. 88 f.

194. Es sey die Zeit, welche der Stein zum Herunterfallen braucht, $= x$ Secunden; dann ist die, in welcher der Schall heraufkommt, $= (5\frac{1}{2} - x)$ Sec. und man erhält die

Gleichung $15,1\,x^2 = 1040\,(5,5 - x)$; woraus nach gehöriger Redukzion sich ergiebt

$$x^2 + \frac{1040}{15,1}x + \left(\frac{520}{15,1}\right)^2 = \frac{5720}{15,1} + \left(\frac{520}{15,1}\right)^2 = \frac{356772}{(15,1)^2}.$$

Ferner $x + \frac{520}{15,1} = \frac{597,363}{15,1}$; und $x = 5,1194\ldots$

Die Zeit für den Schall ist $5,5 - 5,1194 = 0,3805$.

Die Tiefe der Grube $= 395,73\ldots$ Fuß.

Die allgemeine Auflösung dieser Aufgabe s. in meinem Lehrb. der rein. Math. S. 261 f.

195. Der Stein brauche x Secunden; alsdann ist $15,1\,x^2 = 300$; folglich $x = \sqrt{\frac{300}{15,1}} = 4,4580\ldots$ Der

Schall braucht $\frac{300}{1040}$ Sec. $=$ 0,2884

Folglich ist die ganze Zeit $= 4,7464$ Sec.

$4\frac{3}{4}$ Sec. beynahe.

196. Das Gewicht der atmosphärischen Luft, deren Raum der Ballon einnimmt, ist $= 100 \,.\, 2,8 = 280$ Loth $= 8$ Pf. 24 Lth. Das Gewicht der brennbaren Luft ist $= 100 \,.\, 0,4 = 40$ Lth. $= 1$ Pf. 8 Lth. Hierzu das Gewicht der Hülle, 5 Pf., macht 6 Pf. 8 Lth. Folglich steigt der Ballon mit einer Kraft von 2 Pf. 16 Lth., und er steigt so lange, bis das Gewicht der atmosphärischen Luft, deren Raum er einnimmt, seinem ganzen Gewicht gleich ist.

Es sey das Gewicht eines Cubikfußes Luft in der Höhe, die der Ballon erreicht, $= p$ Loth und das eines Cubikfußes brennbarer Luft daselbst $= p'$ Loth — denn die brennbare Luft in dem Ballon dehnt sich in demselben Maaße mehr aus, als der Druck der äußern Luft nachläßt; es muß daher entweder durch eine in dem Ballon unten angebrachte Oeffnung ihr ein Ausgang gestattet, oder der Ballon anfangs nicht ganz durch sie ausgedehnt seyn — ingleichen sey der Barometerstand in der Höhe in Linien ausgedrückt $= b$; so ist $330 : b = 2,8 : p$ und eben so ist $330 : b = 0,4 : p'$. Folglich ist

$2{,}8 : 0{,}4 = p : p'$; ingleichen $2{,}8 - 0{,}4 : p - p' = 2{,}8 : p = 330 : b$. Folglich $p - p' = \frac{2{,}8 - 0{,}4}{330} b = \frac{2{,}4}{330} b$.

Wenn der Ballon seine größte Höhe erreicht hat, so ist $100\,p = 100\,p' + 5 \cdot 32$ Loth $= 100\,p' + 160$. Folglich $100\,(p - p') = 160$; und $p - p' = \frac{160}{100}$. Es ist aber $p - p' = \frac{2{,}4}{330} b$; folglich ist $\frac{160}{100} = \frac{2{,}4}{330} b$; woraus $b = \frac{160}{100} \cdot \frac{330}{2{,}4} = 220$ Lin. folgt.

Wendet man auf diesen Barometerstand, zur Berechnung der Höhe die de Lüc'sche Formel, die hier hinreichend ist, an (s. mein Lehrb. der Physik S. 416), so ergiebt sich die Höhe $= 10565$ Par. Fuß.

Allgemein läßt sich die Aufgabe auf folgende Art lösen: Es sey das Gewicht eines Cubikfußes atmosphärischer Luft an der Erde $= P$, in der Höhe $= p$; das Gewicht eines Cubikfußes brennbarer Luft an der Erde $= P'$, in der Höhe $= p'$; das Volumen des Ballons in Cubikfußen $= V$, das Gewicht der Hülle und angehängten Last $= q$; der Barometerstand an der Erde $= B$, in der Höhe $= b$, die erreichte Höhe $= H$.

Nach dem Marottischen Gesetze verhalten sich die Barometerstände wie die Dichtigkeiten der Luft, und diese wie die absoluten Gewichte gleicher Voluminum, also ist

$$B : b = P : p$$

ingleichen ist $B : b = P' : p'$

folglich $P : p = P' : p'$

Ferner ist $P - P' : p - p' = P : p = B : b$

und daher $p - p' = \frac{P - P'}{B} b$.

Hat der Ballon seine größte Höhe erreicht, so ist

$Vp = Vp + q$; folglich $V\,(p - p') = q$ und

$p - p' = \frac{q}{V} = \frac{P - P'}{B}\,b.$ Hieraus ergiebt sich

$b = \frac{Bq}{V(P - P')}$; und zufolge der de Lüc'schen Formel

$$H = 60000\,(\log B - \log b) \text{ Par. Fuß}$$
$$= 60000\,(\log B - [\log B + \log q - (\log V + \log (P - P')])$$
$$= 60000\,[\log V + \log (P - P') - \log q] \text{ Par. Fuß.}$$

Es versteht sich, daß die Gewichte insgesammt in einerley Gewichtseinheit ausgedrückt seyn müssen.

197. Nach der am Schluß der vorhergehenden Aufgabe aufgestellten Formel, erhält man hier die Gleichung $3000 = 60000\,[\log V + \log 2{,}4 - \log. 32.400]$; woraus sich $\log V = \frac{1}{20} + \log 12800 - \log 2{,}4 = 3{,}7769988$; und $V = 5984$ Cubikfuß ergiebt.

In Kugelform würde der Ballon einen Durchmesser von $22\frac{1}{2}$ Fuß erhalten müssen.

198. Nach derselben Formel findet man leicht
$\log q = \log 8000 + \log 2{,}4 - \frac{1}{15} = 4{,}2166349$
und $q = 16467$ Loth $= 514$ Pf. 19 Loth.

199. Die Erleuchtung der Planeten steht im umgekehrten Verhältniß der Quadrate ihrer Entfernungen von der Sonne. Wird also die Erleuchtung der Erde zum Maaßstabe für die der andern Planeten gemacht, so findet ungefähr folgendes Verhältniß statt:

☿	$6\frac{1}{4}$	⚳	$\frac{100}{729}$
♀	2	♃	$\frac{1}{27}$
♁	1	♄	$\frac{1}{90}$
♂	$\frac{4}{9}$	⛢	$\frac{1}{360}$

200. Da die Stärke der Erleuchtung bey gleicher Größe und Entfernung der Flächen von dem leuchtenden Körper im Verhältniß der Sinusse der Winkel, unter welchen die Strahlen auffallen, steht, und der Sinus eines Winkels von 30 Grad halb so groß, als der des rechten Winkels ist; so ist die Erleuchtung der erstern Fläche in diesem Fall noch einmal so groß, als die der andern.

Vergl. mein Lehrb. der Phys. S. 154.

201. Man setze: $1 : \frac{1}{3} = \sin \text{tot} : \sin x$; dieß giebt $\sin x = 9{,}5228787$ und $x = 19^0\ 28'\ 16''$.

202. Das Verhältniß der Erleuchtung beyder Flächen ist $= \sin 36 : 4 . \sin 50 = 0{,}588 : 3{,}064 = 1 : 5{,}213$.

203. Man bezeichne die Erleuchtung beyder Flächen durch L und l, so ist $L : l = \frac{\sin x}{m^2} : \frac{\sin y}{n^2}$

204. In diesem Fall ist $m : n = 2 : 1$ und $L : l = \frac{\sin 70}{4} : \sin y$; also $\sin y = \frac{\sin 70}{2}$; und $y = 28^0\ 1'\ 27''$.

205. Es sey das Verhältniß ihrer Entfernungen $= m : n$; so ist $\frac{\sin 65}{m^2} : \frac{\sin 50}{n^2} = 3 : 2$; und hieraus ergiebt sich $m : n = \sqrt{(2 . \sin 65)} : \sqrt{(3 . \sin 50)}$, d. i. sehr nahe wie $8 : 9$.

206. Es stelle AC (Fig. 20.) die Höhe des Baumes, AB die Erdfläche, CB den Sonnenstrahl vor, so ist AB die Länge des Schattens. Es ist aber $AC : AB = \tang B : 1$; folglich hier $80 : x = \tang 52 : 1$, woraus die Länge des Schattens $x = 62\frac{1}{2}$ Fuß folgt.

207. Es sey die Höhe der Sonne über dem Horizont $= x$, so ergiebt sich aus der vorhergehenden Aufgabe leicht $100 : 5\frac{1}{3} = 1 : \tang x$; und $x = 3^0\ 3'\ 10''$.

208. Es sey der Kreis um A (Fig. 21.) die Sonne, der Kreis um B die Erde, DFH und CEH ein paar der äußersten Strahlen, die den Kernschatten begrenzen, und FHE der Durchschnitt des Kernschattens; ferner setze man $AC = R$, $BE = r$, $AB = a$, und BH, als die Länge des Kernschattens, $= x$, so ist $AH : AC = BH : BE$ d. i. $a + x : R = x : r$; woraus sich $x = \frac{ar}{R - r}$ ergiebt; und setzt man statt der Buchstaben ihre Werthe, so erhält man $x = 190919$ Meilen.

209. Wenn man in dem Ausdruck für x, bey der vo-

rigen Aufgabe, den Zähler und Nenner mit 2 multiplizirt, so erhält man statt der Halbmesser der Körper ihre Durchmesser; und wendet man ihn dann auf diese Aufgabe an, so ist a die gesuchte Größe und $= \frac{2(R-r)x}{2r}$ oder, wenn D und d die Durchmesser bedeuten, $a = \frac{D-d}{d} x$ d. i. 389 . 51000 = 19,839000 Meilen.

Man sieht wohl, daß dieß ungefähr die Entfernung des Mondes von der Sonne ist, so wie die Aufgabe ungefähr das Verhältniß der Durchmesser dieser Körper, und die Länge des Mondschattens bestimmt.

210. Die erste Frage beantwortet sich aus 208; die Länge des Kernschattens ist $= \frac{4 \cdot 72}{11} = 26\frac{2}{11}$ Fuß. Zur Beantwortung der zweyten Frage errichte man aus g (Fig. 22. in welcher die Linien dieselbe Bedeutung haben, wie in Fig. 21.) die Linie gK, die den Halbmesser des Kernschattens in der Entfernung Bg = 10 Fuß vorstellt, senkrecht auf BH, und setze den Winkel BHE = u. Alsdann ist BH : BE = 1 : sin u d. i. $26\frac{2}{11}$: 4 oder 288 : 44 = 1 : sin u; wo u = 8° 47′ 16 wird. Ferner ist 1 : tang u = Hg : gK = $16\frac{2}{11}$: gK, und gK = $2\frac{1}{2}$ Fuß. Zur Beantwortung der dritten Frage ziehe man die gemeinschaftliche Tangente, mnN, an beyde Kreise; dadurch erhält man die eine Seite, oN, des umgekehrten Halbschatten-Kegels, und die Entfernung, Bo, der Spitze desselben vom Mittelpunkt des dunkeln Körpers. Es ergiebt sich dann leicht aus Betrachtung der ähnlichen Dreyecke Aom und Bon, daß $Bo = \frac{ar}{R+r}$, also hier $= \frac{4 \cdot 72}{19} = \frac{288}{19} = 15\frac{3}{19}$ Fuß ist. Ferner ist Bo : Bn = 1 : sin Bon d. i. $\frac{288}{19}$: 4 oder 288 : 76 = 1 : sin Bon; woraus Bon = 15° 18′ 3″ folgt. Verlängert man alsdann Kg bis l, so ist og : gl = 1 : tang gol oder Bon d. i. $25\frac{3}{19}$: gl = 1 : tang 15° 18′ 3″;

woraus gl, als der Halbmesser des Halbschattens, sich = 6,88.. Fuß ergiebt.

Die Breite des Halbschattens endlich ist = gl — gK = 4,38.. Fuß.

Um die Tangente mnN zu ziehen vergl. mein Lehrb. der Mathematik S. 449 ff.

211. In diesem Fall macht der Kernschatten einen umgekehrten Kegel, dessen Spitze nach der entgegengesetzten Seite, jenseits des leuchtenden Körpers fällt. Der Abstand derselben vom Mittelpunkt der dunkeln Kugel wird daher, nach der Formel in 208 berechnet, = — $308\frac{4}{7}$ Fuß gefunden. Mit Hülfe dieser Linie, als positiv betrachtet, findet sich der Winkel, welchen die Achse des Kegels mit der Seite desselben macht, = $11^\circ\,12'\,42''$; und dann giebt die Proportion $1 : \tan 11^\circ\,12'\,42'' = 308\frac{4}{7} + 150 : z$, den Halbmesser, z, des Kernschattens = 90,89.. Fuß.

Die Spitze des Halbschattenkegels liegt $127\frac{1}{17}$ Fuß vom Mittelpunkt der dunkeln Kugel. Der Winkel, welchen die Achse desselben mit der Seite macht, ist $28^\circ\,10'\,42''$; und durch Hülfe der Tangente desselben findet sich der Halbmesser des Halbschattens = 148,42.. Fuß.

212. Aus der Formel für die Länge des Kernschattens in 208. findet sich der Halbmesser des leuchtenden Körpers = 20 Fuß.

213. Ist u der Winkel, welchen die Achse des Schattenkegels mit der Seite desselben macht, so ist $\sin u = r : \frac{ar}{R-r} = \frac{R-r}{a}$. Ferner ist $1 : \tan u = \frac{ar}{R-r} - b : \varrho$ und daher $\varrho = \frac{ar - b\,(R-r)}{R-r} \cdot \tan u$.

Der Abstand der Spitze des Halbschatten-Kegels vom Mittelpunkt des dunkeln Körpers ist $= \frac{ar}{R+r}$ (210.), und nennt man den Winkel, welchen die Achse dieses Kegels mit

der Seite desselben macht, o; so ist $\sin o = r : \frac{ar}{R+r} = \frac{R+r}{a}$.

Ferner ist $1 : \text{tang}\, o = \frac{ar}{R+r} + b : h$, woraus sich $h = \frac{ar + b(R+r)}{R+r} \text{tang}\, o$ ergiebt.

214. Es sey C (Fig. 23.) der leuchtende Punkt, $CA = a$, $AB = r$, $AD = b$ und $DE = \varrho$, so ist $CA : AB = CD : DE$ d. i. $a : r = a + b : \varrho$; folglich $\varrho = \frac{a+b}{a} r$.

215. In diesem Fall ist $\varrho = \frac{6+12}{6} \cdot 3 = 9$ Zoll.

216. Der Schatten wird alsdann eine Ellipse. Denn es sey AB (Fig. 24.) der Durchmesser der Scheibe, in C der leuchtende Punkt, so stellt ACB den Durchschnitt des schiefen Strahlenkegels vor, dessen Erweiterung den Schattenkegel bildet, der von der Wand in DE durchschnitten wird. Der Durchschnitt ist in diesem Fall kein Wechselschnitt, folglich eine Ellipse, deren kleine Achse DE ist.

Um die Größe derselben zu finden, suche man zuerst den Winkel $ACO = y$, aus $OA = 3$, $OC = 6$, und dem eingeschlossenen Winkel $AOC = 60$ Gr. Es findet sich $y = 30$ Gr. Folglich sind die Winkel bey A rechte. Zieht man darauf $BL \parallel ED$, so ist der Winkel $ABL = 30^0$ und $BL = \frac{AB}{\cos 30} = \frac{6}{\cos 30}$; Of aber $= BO \cdot \sin 30 = 3 \cdot \sin 30 = \frac{3}{2}$. Endlich ist $Cf : BL = CF : DE$ d. i. $7\frac{1}{2} : \frac{6}{\cos 30} = 18 : DE$; und $DE = \frac{6 \cdot 18 \cdot 2}{15 \cdot \cos 30} = 16{,}627 \ldots$ Zoll.

Um die große Achse zu finden, ziehe man durch die Mitte von DE, durch N, die Linie $MP \parallel AB$. Diese ist der Durchmesser des Kreises, welchen der mit AB parallele Durchschnitt des Kegels giebt; und die in N auf NM und ND senkrechte, bis an die Peripherie des Kreises gehende, Linie ist die halbe

große Achse. Sie ist aber die mittlere Proportionallinie zwischen MN und NP, und daher $= \sqrt{(MN \,.\, NP)}$. Nun ist $MN = DN \,.\, \cos 30 = 8{,}314 \,..\, \cos 30$. NP aber ist = dem Halbmesser des Kreises, welchen der durch D mit MP parallele Durchschnitt, DS, des Kegels giebt. Denn es ist $EN : DE = NP : DS$, und da $EN = \frac{1}{2}DE$, so auch $NP = \frac{1}{2}DS$. Ferner ist $CA : AB = CD : DS$ d. i. $6 \,.\, \cos 30 : 6 = \frac{18}{\cos 30} : DS$; woraus $DS = \frac{18}{\cos 30^2}$; also $NP = \frac{1}{2}DS = \frac{9}{\cos 30^2}$ folgt. Endlich ist $\sqrt{(MN \,.\, NP)} = \sqrt{\frac{8{,}314 \,.\, \cos 30 \,.\, 9}{\cos 30^2}} = \sqrt{\frac{74{,}826}{\cos 30}} = 9{,}295$; folglich die ganze große Achse = 18,590 Zoll.

217. Durch eine ähnliche Rechnung wie in 216. findet sich der Winkel $y = 23^0\, 47'\, 39''$; $CF = 8{,}598$; $BL = 5{,}295$; die kleine Achse $DE = 11{,}087$ Zoll.

Ferner ist $MDN = 90 - y = 66^0\, 12'\, 21''$; $DMN = 53^0\, 47'\, 39''$; $MN = 6{,}2805$; $NP = \frac{1}{2}DS = 15{,}873$; woraus sich die große Achse $= 2\sqrt{(MN \,.\, NP)} = 19{,}9690$ Zoll findet.

218. Die kleine Achse ist = 4,126; die große = 20,681 Zoll.

219. Als eine gerade Linie. Die Größe derselben findet sich, wenn man sich von dem leuchtenden Punkt die Tangente an die Scheibe gezogen, und bis an die Wand verlängert denkt. Die Tangente bildet mit dem Halbmesser der Scheibe, und der geraden Linie, CO, vom leuchtenden Punkt nach dem Mittelpunkt, ein Dreyeck, das dem Dreyeck, welches die bis an die Wand verlängerte Tangente mit der Linie an der Wand, und der Linie, CF, vom leuchtenden Punkt bis an die Wand, bildet, ähnlich ist. Man erhält daher die Proportion: $\sqrt{(36 - 9)} : 3 = 18 : x$; wo $x = 2\sqrt{27} = 10{,}3923$; folglich die ganze Schattenlinie $= 2x = 20{,}7846$ ist.

Man hat sich in diesem Fall eine Ellipse zu denken, deren

kleine Achse = o geworden ist. Es zeigt sich überhaupt, daß die kleine Achse mit der Größe des Winkels, um welchen die Scheibe gedreht wird, abnimmt, die große hingegen wächst.

220. Der Abstand des leuchtenden Punktes vom Mittelpunkt der Scheibe muß dem Halbmesser der Scheibe gleich seyn, und die gerade Linie vom leuchtenden Punkt durch den Mittelpunkt, bis an die Wand verlängert, senkrecht auf derselben stehen. Der Abstand der Scheibe von der Wand ist willkührlich.

Beweis.

Es sey AB (Fig. 25.) der Durchmesser der Scheibe, C der leuchtende Punkt, $CO = AO$; CF der Abstand des leuchtenden Punktes von der Wand, DE der Durchschnitt des Schattens an der Wand; alsdann stellt CDE einen geraden, rechtwinkligen Kegel vor, dessen Grundfläche, $DE \parallel AB$, ein Kreis ist.

Darauf werde die Scheibe gedreht und in die Lage $A'B'$ gebracht; alsdann stellt $A'CB'$ einen schiefen, ebenfalls rechtwinkligen, Kegel vor (weil $OA' = OC = OB'$, also $A'CB'$ ein Winkel im Halbkreise ist), und $D'E'$ ist der gegen die Achse CF, des bis an die Wand erweiterten Kegels, senkrecht geführte Durchschnitt desselben. Dieser Durchschnitt aber ist ein Wechselschnitt von $A'B'$. Denn in dem rechtwinkligen Dreyeck $D'CE'$ wird der rechte Winkel in C durch das Perpendickel, CF, so getheilt, daß der Winkel $CD'F = FCE'$; und $CE'F = FCD'$ ist. Es ist aber $FCE' = CB'O$ (weil $OC = OB$), und $FCD' = CA'O$ (weil $OC = OA'$), folglich ist auch $CD'F = CB'O$; und $CE'F = CA'O$; also ist $D'E'$ der Durchschnitt eines Kreises.

Da bey diesem Beweise die Größe des Winkels, um welchen die Scheibe gedreht wird, nicht in Betrachtung kommt, so gilt er für jede Stellung derselben.

Um die Größe des Durchmessers $D'E'$ zu finden, setze man $D'E' : CE' = 1 : \cos D'E'C$; und $CE' : CF = 1 : \sin D'E'C$;

also $D'E' = \frac{CE'}{\cos D'E'C} = \frac{CF}{\sin D'E'C \,.\, \cos D'E'C}$. Es sey CF, als der Abstand des leuchtenden Punktes von der Wand $= p$; und der Halbmesser des Schattenkreises an der Wand $= \varrho = \frac{1}{2}D'E'$, so ist $\varrho = \frac{p}{2 \sin D'E'C \,.\, \cos D'E'C} = \frac{p}{\sin 2 D'E'C}$. Ferner sey der Winkel AOA', um welchen die Scheibe aus der mit der Wand parallelen Stellung gedreht wird, $= u$, so ist $D'E'C = CA'O = A'CO = \frac{90 + u}{2}$; folglich $2 DE'C = 90 + u$ und $\varrho = \frac{p}{\sin (90 + u)} = \frac{p}{\cos u}$.

Dieser Ausdruck ist ungemein bequem zur Bestimmung der Größe des Schattenkreises für jede Stellung der Scheibe. Da der Cosinus von u abnimmt, wenn der Winkel wächst, so folgt, daß der Schattenkreis an der Wand immer größer wird, je weiter man die Scheibe herumdreht; und für $u = 90$, wird $\cos u =$ Null, folglich ϱ unendlich groß.

221. Um die kleine Achse, die durch DE (Fig. 24.) vorgestellt wird, zu finden, suche man zuerst, wie in 216. den Winkel y. Es ist aber $\cot y = \frac{a}{r \cos u} - \operatorname{tg} u$. Ferner ist $Of = Og = r \sin u$; und $CL : Cg = 1 : \cos y$, daher $CL = \frac{a + r \sin u}{\cos y}$; $\angle ALB = 90 - y$; $\angle BAL = 90 + y - u$. Ferner $\sin ALB : \sin BAL = AB : BL$ d. i. $\cos y : \cos (y - u) = 2r : BL$; also $BL = 2r \frac{\cos (y - u)}{\cos y}$. Endlich ist $Cf : CF = BL : DE$ d. i. $(a + r \sin u) : (a + b) = 2 r \frac{\cos (y - u)}{\cos y} : DE$. Folglich $DE = 2 r (a + b) \frac{\cos (y - u)}{\cos y \, (a + r \sin u)}$.

Für die große Achse müssen die allgemeinen Ausdrücke für MN und NP gesucht werden. Nun ist $\angle MDN =$

$90 - y$; und $\angle DMN = 90 + y - u$; ferner $\sin DMN : \sin MDN = DN : MN$ d. i. $\cos(y - u) : \cos y = \frac{1}{2}DE : MN$. Folglich $MN = r(a + b)\frac{\cos(y - u)}{\cos y(a + r \sin u)} \cdot \frac{\cos y}{\cos(y - u)} = r(a + b)\frac{1}{a + r \sin u}$. Alsdann ist $NP = \frac{1}{2}DS$; und $CA : AB = CD : DS$ d. i. $\frac{a - r \sin u}{\cos y} : 2r = \frac{a + b}{\cos y} : DS$; folglich $DS = 2r(a + b)\frac{1}{a - r \sin u}$ und $\frac{1}{2}DS = r(a + b) \cdot \frac{1}{a - r \sin u}$. Endlich ist die halbe große Achse $= \sqrt{(MN \cdot NP)} = r(a + b)\sqrt{\frac{1}{a^2 - r^2 \sin u^2}}$; folglich die ganze große Achse $= 2r(a + b)\sqrt{\frac{1}{a^2 - r^2 \sin u^2}}$.

Aus diesen Formeln läßt sich die Gestalt des Schattens für besondere Fälle ableiten. Z. B.

1) Für $u =$ Null, d. i. wenn die Scheibe nicht gedreht wird, sondern der Wand parallel bleibt, wird die große Achse der kleinen gleich, und jede $= \frac{2r(a + b)}{a}$; der Schatten ist folglich ein Kreis, dessen Halbmesser $= \frac{r(a + b)}{a}$ ist (214.).

2) Für $u = 90$ wird $y =$ Null, und $\cos(y - u) = \cos - 90 = 0$; $\cos y$ aber $= 1$; folglich $DE = 0$; und die große Achse $= 2r(a + b)\sqrt{\frac{1}{a^2 - r^2}}$.

3) Für $a^2 = r^2 \sin u^2$ wird die große Achse unendlich groß. Alsdann ist $a = r \sin u$; und $\sin u = \frac{a}{r}$; folglich wird $\cos y = 0$, und $y = 90$; also auch $\cos y = 0$; und daher auch DE unendlich groß. Der Schatten ist also in diesem Fall keine Ellipse, sondern eine Parabel.

4) Für $a = r$ wird die große Achse $= 2(r + b)$

$\sqrt{\frac{1}{1-\sin u^2}} = 2\,(r+b)\,\frac{1}{\cos u}$. Der Winkel y wird als-dann $= 45 + \frac{1}{2}u$ und $DE = 2(r+b)\,\frac{\cos(45-\frac{1}{2}u)}{\cos(45+\frac{1}{2}u).(1+\sin u)}$. Daß auch dieser Ausdruck dem für die große Achse gleich ist, läßt sich auf folgende Art darthun: Es ist $1+\sin u = 2\cos(45-\frac{1}{2}u)^2$ (siehe unter andern von Münchow's Grundlehren der Trigonometrie S. 93). Folglich ist DE =

$$(r+b)\,\frac{1}{\cos(45+\frac{1}{2}u).\cos(45-\frac{1}{2}u)} =$$

$$(r+b).\frac{1}{\sin(45-\frac{1}{2}u).\cos(45-\frac{1}{2}u)} = (r+b)\,\frac{1}{\frac{1}{2}\sin(90-u)}$$

$= 2\,(r+b)\,\frac{1}{\cos u}$. Die Hälfte der großen und der kleinen Achse, oder, der Halbmesser des Kreises ist dann $= (r+b)\,\frac{1}{\cos u}$. (Vergl. 220.)

222. Soll der Schatten an der Wand eine Parabel bilden, so kommt es darauf an, daß die eine Seite des Schattenkegels der Wand parallel geht. Dieß kann auf unendlich vielfache Weise erreicht werden. Es sey z. B. der leuchtende Punkt in C (Fig. 26.), und RN die Richtung der Wand; man ziehe CM parallel RN, und CS unter einem beliebigen Winkel. Alsdann gebe man der Scheibe, deren Durchmesser AB sey, eine beliebige Stellung zwischen den Schenkeln des Winkels MCS, doch so, daß die Endpunkte ihres Durchmessers in die Schenkel selbst fallen, und sie auf der Ebene des Winkels MCS senkrecht steht. Der Schattenkegel, der auf diese Weise entsteht, wird von der Ebene der Wand der Seite, CM, des Kegels parallel durchschnitten; folglich ist der Durchschnitt eine Parabel.

Wird die Linie CM divergent gegen RN gezogen (Fig. 27), CS wiederum beliebig, und die Scheibe AB auf ähnliche Weise, wie vorhin, zwischen die Schenkel des Winkels MCS

gebracht, so ist der Durchschnitt des Schattenkegels von der Ebene der Wand in diesem Fall eine Hyperbel.

223. Es sey RN (Fig. 28.) die Richtung der Wand, AE die große Achse der elliptischen Scheibe, die unter dem Winkel x an die Wand gelegt ist; ACB sey der Durchschnitt des gesuchten Kegels, in welchen die gegebene Ellipse paßt, und dessen Grundfläche ein Kreis von dem Halbmesser $= r$ ist; dann kommt es darauf an die Seiten AC und BC des Kegels zu bestimmen, wodurch der Punkt, C, als die Stelle des leuchtenden Punktes bestimmt ist.

Zu diesem Ende denke man sich den Kegel durch die Mitte von AE, durch H, parallel mit der Grundfläche durchschnitten; der Durchschnitt ist ein Kreis, dessen Durchmesser FG ist, und das in H errichtete, bis an die Peripherie des Kreises gehende, Perpendikel ist die halbe kleine Achse also $= \frac{1}{2}\beta = \sqrt{(FH \,.\, HG)}$. Es ist aber $FH = \frac{1}{2}AB = r$; folglich $HG = \frac{\beta^2}{4r}$, und $FG = \frac{\beta^2}{4r} + r = \frac{\beta^2 + 4r^2}{4r}$.

Ferner ist $EB = \sqrt{(AE^2 + AB^2 - 2\,AE \,.\, AB \cos x)} = \sqrt{(\alpha^2 + 4r^2 - 4\alpha r \cos x)}$ und $EF = \frac{1}{2}EB = \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha^2 + 4r^2 - 4\alpha r \cos x)}$. Ferner $(CE + EF) : FG = (CE + EB) : AB$; woraus $CE = \frac{\beta^2}{4r^2 - \beta^2} \,.\, EB$; und $BC = \frac{4r^2}{4r^2 - \beta^2}\sqrt{(\alpha^2 + 4r^2 - 4\alpha r \cos x)}$ sich ergiebt.

Um AC zu finden, ziehe man EL || FG; dann ist $AH : HG = AE : EL$, folglich $EL = 2\,HG = \frac{\beta^2}{2r}$. Alsdann ist $AL = \sqrt{(\alpha^2 + \frac{\beta^4}{4r^2} - \frac{\alpha\beta^2}{r}\cos x)}$ und $BE : AL = BC : AC$; woraus $AC = \frac{4r^2}{4r^2 - \beta^2}\sqrt{(\alpha^2 + \frac{\beta^4}{4r^2} - \frac{\alpha\beta^2}{r}\cos x)}$. Hiernach ist das Verhältniß der beyden Seiten des Kegels, $BC : AC = \sqrt{(\alpha^2 + 4r^2 - 4\alpha r \cos x)} : \sqrt{(\alpha^2 + \frac{\beta^4}{4r^2} - \frac{\alpha\beta^2}{r}\cos x)}$.

Setzt man also beyde Seiten einander gleich, oder sucht man den Werth von x für den Fall, daß der Kegel gerade sey, so erhält man $\alpha^2 + 4r^2 - 4ar\cos x = \alpha^2 + \frac{\beta^4}{4r^2} - \frac{\alpha\beta^2}{r}\cos x$;

und hieraus $\cos x = \frac{4r^2 + \beta^2}{4\alpha r}$.

Da der Winkel x, unter welchem die elliptische Scheibe gegen die Wand geneigt wird, unendlich verschieden seyn kann, von seiner Größe aber die Größe und Gestalt des ganzen Kegels abhängig ist, so folgt, daß es unendlich verschiedene Stellungen für den leuchtenden Punkt giebt, bey welchen ein kreisförmiger Schatten an der Wand entsteht.

Es ist auch nicht nöthig, daß die Scheibe unmittelbar an die Wand selbst gehalten werde; sie kann sich auch in einiger Entfernung von derselben, in einer der Stellung an der Wand parallelen Lage, befinden; nur wird der Kreis an der Wand alsdann desto größer, je größer die Entfernung ist.

224. Es sey RN (Fig. 29.) die Wand, der Kreis um O die Kugel, der leuchtende Punkt in C; alsdann stellt BCG den Kegel vor, dessen Durchschnitt, BD, von der Wand, den Schatten daselbst bildet, der in diesem Fall eine Ellipse ist.

Um diese zu bestimmen, setze man Om = r, CO = a, AC = b, On = d; $\angle$OCm = x; $\angle$AhC = y; $\angle$ABC = u; BD, als die große Achse, $= \alpha$. Alsdann ist BC : BD = sin ADC : sin BCD d. i. BC : α = sin (y + x) : sin 2x. Ferner ist $\frac{AC}{BC} = \sin u$, d. i. $\frac{b}{BC} = \sin(y - x)$; und daher $BC = \frac{b}{\sin(y-x)}$; folglich ist $\alpha = \frac{b \sin 2x}{\sin(y+x) . \sin(y-x)}$.

Es ist aber $\frac{Om}{CO} = \frac{r}{a} = \sin x$; und zieht man OE || AD, so ist $\frac{CE}{CO} = \frac{b-d}{a} = \sin y$. Ingleichen ist $\cos x = \frac{Cm}{CO}$ $= \frac{\sqrt{(a^2 - r^2)}}{a}$; und $\cos y = \frac{OE}{CO} = \frac{\sqrt{(a^2 - (b-d)^2)}}{a}$.

Soll die große Achse unmittelbar durch die gegebenen Linien a, b, d, r ausgedrückt werden, so setze man statt des vorigen Ausdrucks für α, den gleichgeltenden

$\alpha = \frac{2\,b \sin x \,.\, \cos x}{\sin y^2 \cos x^2 - \cos y^2 \sin x^2}$, und statt der Sinusse und Cosinusse, die eben angegebenen Werthe derselben; dann findet sich leicht $\alpha = \frac{2\,br \sqrt{(a^2 - r^2)}}{(b-d)^2 - r^2}$.

Um die kleine Achse zu finden, ziehe man DF || BG, und durch die Mitte von BD, durch f, rs gleichfalls || BG; dann ist rs der Durchmesser des Kreises, dessen Durchschnitt mit der Ebene der Ellipse die kleine Achse derselben giebt. Wird diese $= \beta$ gesetzt, so ist $\frac{1}{2}\beta = \sqrt{(rf \,.\, fs)}$. Es ist aber $rf = \frac{1}{2}DF$; und BD : DF = sin BFD : sin u d. i. $\alpha : DF = \cos x : \sin(y-x)$; folglich $DF = \frac{\sin(y-x)}{\cos x} \,.\, \alpha = \frac{\sin(y-x)}{\cos x} \,.\, \frac{2\,b \sin x \cos x}{\sin(y+x) \,.\, \sin(y-x)} = \frac{2\,b \sin x}{\sin(y+x)}$ also $rf = \frac{b \sin x}{\sin(y+x)}$. Ferner ist Df : fs = cos x : sin (y + x); folglich $fs = \frac{\sin(y+x)}{\cos x} \,.\, \frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin(y+x) \,.\, b \,.\, \sin x \,.\, \cos x}{\cos x \,.\, \sin(y+x) \,.\, \sin(y-x)} = \frac{b \sin x}{\sin(y-x)}$. Also $\sqrt{(rf \,.\, fs)} = \frac{b \sin x}{\sqrt{(\sin(y+x) \,.\, \sin(y-x))}} = \frac{1}{2}\beta$; und $\beta = \frac{2\,b \sin x}{\sqrt{[\sin(y+x) \,.\, \sin(y-x)]}}$.

Für β kann man auch setzen $\frac{2\,b \sin x}{\sqrt{(\sin y^2 \cos x^2 - \cos y^2 \sin x^2)}}$ und nimmt man statt der Sinusse und Cosinusse ihre Werthe, so erhält man $\beta = \frac{2\,br}{\sqrt{[(b-d)^2 - r^2]}}$.

Es ist leicht zu sehen, an welche Stelle der leuchtende Punkt gebracht werden muß, um die andern Kegelschnitte in dem Schatten an der Wand hervorzubringen: 1) wird er in die rückwärts verlängerte Linie On gebracht, so ist der Schatten

ein Kreis. Alsdann ist $\alpha = \beta$; und die Formel giebt $a = b - d$. 2) wird $b = d + r$, so wird $b - d = r$; und $(b-d)^2 - r^2 = o$, folglich α sowohl, als β unendlich groß. Der Schatten ist dann eine Parabel; 3) wird $b < d + r$, so geht die eine Seite des Schattenkegels divergent mit der Richtung der Wand, und der Schatten wird eine Hyperbel. Wird in diesem Fall $b = d$, so wird $\alpha = \frac{2b\sqrt{(a^2 - r^2)}}{-r}$, welches die Hauptachse der Hyperbel anzeigt, deren Richtung der Richtung der Achsen der andern Kegelschnitte entgegengesetzt, und daher durch einen negativen Quotienten bezeichnet ist. Für $b = d - r$ wird der Nenner $= o$, also α unendlich. Alsdann geht die der Wand zunächst liegende Seite des Kegels der Wand parallel; trifft sie also erst im Unendlichen; oder, es entsteht gar kein Schatten an der Wand. Noch weniger ist dieß der Fall, wenn $b < d - r$ wird.

225. Befindet sich das Auge in O (Fig. 30.), und stellt AB den Gegenstand, und OA die Entfernung desselben vor, so ist $OA : AB = 1 : \text{tang } AOB$; woraus sich $OA = 567{,}12$ Fuß findet.

226. Es sey der Winkel $= x$, so ist $1800 : 480 = 1 : \text{tang } x$; und $x = 14^0\ 55'\ 53''$.

227. 468 Meilen.

228. Es kommt hier darauf an, aus zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines Dreyecks einen der beyden andern Winkel zu finden. Der Winkel AMB ist $= 9^0\ 53'\ 46''$.

229. Die Aufgabe ist unbestimmt, d. i. gestattet unzählige Auflösungen; doch sind im allgemeinen zwey Fälle zu unterscheiden:

1) wenn beyde Linien zusammen eine einzige gerade bilden. In diesem Fall sey AB (Fig. 32.) die eine, BC die andere Linie. Man beschreibe über AC ein Dreyeck AOC, in welchem $AO : OC = AB : BC$ ist; dann ist O der gesuchte Punkt, und $\angle AOB = BOC$. (S. mein Lehrb. der reinen Math. §. 100.)

2) wenn beyde Linien einen Winkel einschließen a) kleiner als 2 rechte, wie ABC (Fig. 33.); b) größer als 2 rechte, wie DEF (Fig. 34).

Es sey O in beyden Fällen der gesuchte Punkt, so daß sowohl $\angle AOB = COB$, als $\angle DOE = FOE$ ist. Alsdann ist

I. $\sin AOB : \sin A = AB : OB$, ingleichen
$\sin C : \sin COB = OB : BC$, folglich
$\sin C : \sin A = AB : BC$.

II. $\sin DOE : \sin D = DE : OE$, ingleichen
$\sin F : \sin FOE = OE : EF$, folglich
$\sin F : \sin D = DE : EF$.

In beyden Fällen verhalten sich also die Sinus der an die gegebenen Linien gelegten Winkel, umgekehrt wie die Linien selbst. Hieraus ergiebt sich folgendes Verfahren, den Punkt O zu finden: Man lege an AB oder DE eine gerade Linie unter einem beliebigen Winkel, suche darauf denjenigen, dessen Sinus sich zu dem Sinus von jenem, wie AB : BC oder wie DE : EF verhält, und trage diesen Winkel an C oder F. Der Durchschnittspunkt beyder Schenkel giebt den gesuchten Punkt.

Dieses Verfahren paßt selbst auf den Fall, wo beyde Linien eine einzige gerade bilden.

230. An derjenigen Stelle, an welcher ein durch die Punkte a und b gehender Kreis die Ebene MN berührt.

Die Aufgabe stellt also einen Fall des apollonianischen Problems dar, und läßt sich leicht auf folgende Art auflösen:

Man ziehe durch die Mitte von ab, durch c, eine Linie, cf, senkrecht auf ab; verlängere ab bis an die Ebene in d, mache de = der mittlern Proportionallinie zwischen ad und bd, und errichte aus e die senkrechte Linie, eg. Der Punkt, g, in welchem diese die Linie cf trifft, ist der Mittelpunkt des Kreises und e der Punkt, in welchem ab am größten erscheint. Denn, da alle andern Punkte der Tangente MN außerhalb

des Kreises liegen, so muß ein jeder Winkel über ab, dessen Spitze in einen andern Punkt derselben fällt, kleiner seyn, als der, dessen Spitze innerhalb der Schenkel dieses Winkels in der Peripherie liegt. (Vergl. mein Lehrb. der reinen Math. §. 62.) Alle Winkel aber in dem Kreisabschnitt über ab sind einander gleich.

Setzt man die Linie ab = a, den Abstand des Punktes a von MN = P; den Abstand des Punktes b = p, und den Winkel, welchen die bis MN verlängerte Linie mit MN macht = u, so ist der Halbmesser des Kreises $r = \frac{P + p - 2\cos u \sqrt{(Pp)}}{2 \sin u^2}$.

Der Winkel u findet sich durch $\sin u = \frac{P - p}{a}$.

231. Da die Brechung in eine Zurückwerfung übergeht, wenn der Sinus des gebrochenen Winkels, dem Brechungsverhältniß zufolge, = 1 oder > 1 werden müßte, so hat man hier die Proportion $2 : 3 = \sin x : 1$, woraus sich der Einfallswinkel $x = 41^0\ 48'$ findet.

232. Im ersten Fall bey $48^0\ 35'$; im zweyten bey $62^0\ 45'$.

233. Es sey ABC (Fig. 36.) ein senkrechter Durchschnitt des Prisma's, DE der einfallende Strahl, FE das Neigungsloth, x der Einfallswinkel, y der gebrochene Winkel, so ist $\sin 50 : \sin y = 3 : 2$ d. i. $y = 30^0\ 42'\ 36''$. Ferner ist EG der Weg des Strahls durch das Prisma, EGL der Einfallswinkel auf der Seite BC, GH der ausfahrende Strahl, KG das Neigungsloth daselbst, und z der gesuchte Winkel.

Der Einfallswinkel EGL ist $= 180 - (ELG + y) = 180 - (180 - C + y) = 40^0 - 30^0\ 42'\ 36'' = 9^0\ 17'\ 24''$; und die Proportion $2 : 3 = \sin 9^0\ 17'\ 24'' : \sin z$ giebt den Winkel $z = 14^0\ 0'\ 47''$.

234. Man bezeichne die Winkel, wie bey der vorigen Aufgabe; dann ist $\sin y = \frac{2}{3} \sin x$; $\angle ELG = 180 - 60 = 120$; $\angle EGL = 180 - (ELG + y) = 60 - y$; und

$\sin(60-y):\sin z = 2:3$; folglich $\sin z = \frac{3}{2}\sin(60-y)$

und da $z = x$ seyn soll, so ist auch $\sin x = \frac{3}{2}\sin(60-y)$

$= \frac{3}{2}(\sin 60 . \cos y - \cos 60 \sin y) = \frac{3}{2}(\sin 60 \sqrt{(1-\sin y^2)})$

$-\frac{3}{2}\cos 60 \frac{2}{3}\sin x = \frac{3}{2}\sin 60 \sqrt{(1-\frac{4}{9}\sin x^2)} - \cos 60 . \sin x.$

Folglich $\sqrt{(1-\frac{4}{9}\sin x^2)} = \frac{(1+\cos 60)\sin x}{\frac{3}{2}\sin 60} = \frac{\sin x}{\sin 60}$

ferner $1 - \frac{4}{9}\sin x^2 = \frac{\sin x^2}{\sin 60^2}$; und $\sin 60^2 = \sin x^2 +$
$\frac{4}{9}\sin 60^2 \sin x^2 = (1 + \frac{4}{9}\sin 60^2)\sin x^2 =$
$\frac{9 + 4 . \sin 60^2 \sin x^2}{9}$ woraus $\sin x^2 = \frac{9 \sin 60^2}{9 + 4 \sin 60^2}$;

$\sin x = \frac{3 \sin 60}{\sqrt{(9 + 4 \sin 60^2)}} = \frac{3 \sin 60}{\sqrt{12}}$ und $x = 48^0\, 35'\, 25'$ folgt.

235. Es ist 1) $\sin y = \frac{1}{n}\sin x$; 2) $o = u - y$; 3) $\sin o : \sin z = 1 : n$; folglich $\sin z = n \sin o = n \sin(u-y)$; 4) verlängert man die Linien DE und HG (Fig. 36.), die den einfallenden und ausfahrenden Strahl vorstellen, bis zum Zusammentreffen in einen Punkt, K, so erhält man ein Viereck, worin die Winkel bey E und G die Scheitelwinkel von x und y sind, und der Winkel bey $L = 180 - u$; folglich ist der Winkel $K = 180 + u - (x + z)$.

236. Alsdann ist $\sin x = \sin z = n \sin(u-y) =$ $n \sin u \cos y - n \cos u \frac{1}{n}\sin x = n \sin u \sqrt{(1-\frac{1}{n^2}\sin x^2)}$ $- \cos u \sin x$; ferner $\frac{(1+\cos u)\sin x}{n \sin u} = \sqrt{(1-\frac{1}{n^2}\sin x^2)}$ und $\frac{(1+\cos u)^2}{n^2 \sin u^2}\sin x^2 = 1 - \frac{1}{n^2}\sin x^2$; woraus

$\frac{(1+\cos u)^2+\sin u^2}{n^2 \sin u^2} \sin x^2 = 1$; und $\sin x =$

$\frac{n \sin u}{\sqrt{(1+2\cos u+\cos u^2+\sin u^2)}} = \frac{n \sin u}{\sqrt{(2(1+\cos u))}}$

$= n \sin \frac{1}{2} u$ folgt. (Vergl. mein Lehrb. der reinen Math. S. 559.)

237. Der Strahl muß senkrecht auffallen. Er geht alsdann gegen die Grundfläche des Prisma's unter einem Winkel von 45 Gr.; wird hier unter einem gleichen Winkel zurückgeworfen, und trifft senkrecht auf die andere Seitenfläche.

238. Der gebrochene Winkel ist dann $= 13^0\ 10'\ 48''$. Folglich geht der Strahl unter einem Winkel $= 45^0 - 13^0 10' 48''$ $= 31^0\ 49'\ 12''$ gegen die Grundfläche des Prisma's; wird hier unter einem gleichen Winkel zurückgeworfen, und trifft die andere Seite unter einem Winkel von $103^0\ 10'\ 48''$. Folglich ist der Winkel, den er daselbst mit dem Neigungsloth macht, wieder $13^0\ 10' 48''$ und daher der gebrochene Winkel des ausfahrenden Strahls ebenfalls = 20 Grad.

239. Es sey SATB (Fig. 37.) der Durchschnitt einer solchen Linse, $CA = R$, $DB = r$, OP die Achse derselben, MN ein mit der Achse parallel auffallender Strahl, CE das Neigungsloth, NP die Richtung des an der vordern Seite gebrochenen Strahls, LF der an der hintern Seite ausfahrende Strahl, DG das Neigungsloth daselbst; F bezeichnet den Brennpunkt, und $AF = BF = FL$ die Brennweite f, da die Dicke des Glases hier nicht berücksichtigt und MN als ganz nahe an der Achse liegend angenommen wird.

Alsdann ist $\sin MNE : \sin CNP = n : 1$; ferner in dem Dreyeck CNP ist $CP : NP = \sin CNP : \sin ACN$; oder, da $\angle ACN = MNE$, und $NP = PA = CP + R$, so ist $CP : CP + R = \sin CNP : \sin MNE = 1 : n$; folglich $CP = \frac{R}{n-1}$.

Ferner ist $\sin GLP : \sin GLF = 1 : n$, und in dem Dr. DPL

$DP : LP = \sin GLP : \sin D$; ingleichen in dem Dr. DLF
$LF : DF = \sin D : \sin GLF$.

Folglich $DP . LF : LP . DF = \sin GLP : \sin GLF = 1 : n$

d. i. $\left(r + R + \frac{R}{n-1}\right) f : \left(R + \frac{R}{n-1}\right) . (r + f) = 1 : n$

oder $\left(r + \frac{nR}{n-1}\right) f : \frac{nR}{n-1} . (r + f) = 1 : n$. Folglich

$n\left(r + \frac{nR}{n-1}\right) f = \frac{nR}{n-1} (r + f)$, und

$((n-1)r + nR)f = R(r + f) = Rr + Rf$, woraus sich ergiebt

$(n-1) . (R + r)f = Rr$; und $f = \frac{Rr}{(n-1)(R+r)}$.

1. Zus. Für $n : 1 = 3 : 2$ wird $f = \frac{2Rr}{R+r}$.

2. Zus. Für das plan-convexe Glas ist r als unendlich groß zu betrachten; daher $f = \frac{R\infty}{(n-1)(R+\infty)} = \frac{R}{n-1}$ weil R gegen das Unendliche verschwindet, und $\infty \pm R = \infty$ ist; und für den Meniskus wird r negativ, daher $f = \frac{-Rr}{(n-1)(R-r)} = \frac{Rr}{(n-1)(r-R)}$.

240. 1) Bey den concav-concaven Gläsern ist sowohl R als r negativ, und daher $f = \frac{Rr}{-(n-1)(R+r)} = -\frac{Rr}{(n-1)(R+r)}$ d. h. die Brennweite ist der Brennweite erhabener Gläser entgegengesetzt.

2) Bey plan-concaven Gläsern ist $f = \frac{-R\infty}{(n-1)(\infty - R)} = -\frac{R}{(n-1)}$.

3) Bey convex-concaven ist R positiv, r negativ, und $R > r$, daher $f = -\frac{Rr}{(n-1)(R-r)}$.

241. Es sey wieder SATB (Fig. 38.) der Durchschnitt eines erhabenen Glases, $CA = R$, $DB = r$, OP die Achse, der leuchtende Punkt befinde sich in O, also $OA = ON = b$; ferner ON der einfallende Strahl, NP die Richtung des gebrochenen, und $\sin ONE : \sin CNP = n : 1$. Alsdann ist

$$OC : ON = \sin ONE : \sin C \quad \text{und}$$
$$NP : CP = \sin C : \sin CNP, \text{ folglich}$$
$$OC \,.\, NP : ON \,.\, CP = \sin ONE : \sin CNP = n : 1$$

d. i. $(b+R) \,.\, (CP+R) : b \,.\, CP = n : 1$; woraus sich ergiebt

$$CP = \frac{b+R}{(n-1)\,b - R} \,.\, R.$$

Ferner sey LH der ausfahrende Strahl, DG das Neigungsloth und $\sin GLP : \sin GLH = 1 : n$; $LH = BH = F$. Alsdann ist $DP : LP = \sin GLP : \sin D$

$$\text{und } LH : DH = \sin D : \sin GLH \text{ folglich}$$
$$DP \,.\, LH : LP \,.\, DH = \sin GLP : \sin GLH = 1 : n$$
$$\text{d. i. } (r+R+CP) \,.\, F : (R+CP) \,.\, (r+F) = 1 : n.$$

Setzt man hier statt CP den vorstehenden Werth desselben, und das Product der äußern Glieder gleich dem der mittlern, so erhält man nach gehöriger Redukzion

$$F = \frac{bRr}{(n-1)(R+r)\,b - Rr}$$

und dividirt man dieß im Zähler u. Nenner durch $(n-1)(R+r)$ so ergiebt sich

$$F = \frac{bf}{b-f},$$

welches die gewöhnliche Formel für die Vereinigungsweite unter den in der Aufgabe bestimmten Bedingungen ist.

242. Da bey den Hohlgläsern die Brennweite $= -f$ ist, so wird $F = -\frac{bf}{b+f}$.

243. In diesem Fall ist $20 = \frac{6r}{\frac{1}{2}(r-6)}$ (239, 2. Zus.), woraus sich $r = 15$ Zoll ergiebt.

244. Die Entfernung des Gegenstandes vom Glase,

in demselben Maaße, wie die Brennweite ausgedrückt, ist = 120 Zoll; und dann ist $F = \frac{120 . 8}{120 - 8} = \frac{960}{112} = 8\frac{4}{7}$ Zoll.

245. Man setze $30 = \frac{10b}{b - 10}$, so findet sich $b = 15$.

246. Da die Größe des Gegenstandes sich zur Größe des Bildes verhält, wie die Entfernungen beyder vom Glase, so ist hier $b : F = 1 : 4$, also $F = 4b$. Man erhält daher die Gleichung $4b = \frac{9b}{b-9}$ oder $4 = \frac{9}{b-9}$, und $b = 11\frac{1}{4}$ Zoll.

247. Da in diesem Fall die Vereinigungsweite negativ ist d. i. auf dieselbe Seite des Glases fällt, auf welcher der Gegenstand liegt, so ist die Gleichung $-4b = \frac{9b}{b-9}$; woraus sich $b = 6\frac{3}{4}$ Zoll ergiebt.

248. Es ist $F = \frac{-6 . 18}{18 + 6} = -\frac{108}{24} = -4\frac{1}{2}$ d. i. das Bild erscheint $4\frac{1}{2}$ Zoll vor dem Glase; folglich verhält sich seine Größe zu der des Gegenstandes, wie $4\frac{1}{2} : 18$ d. i. wie $1 : 4$.

249. Im ersten Fall $+ 6$ Zoll; im zweyten $- 3$ Zoll.

250. Wenn beyde Gläser sehr nahe an einander liegen, und die erhabene Linse die vordere ist, so werden die auf dieselben fallenden, mit der Achse parallelen, Strahlen, MN, so gebrochen, daß sie die Achse in einem, 5 Zoll hinter der Hohllinse liegenden, Punkte, f, treffen würden — indem die Dicke der Gläser nicht berücksichtigt wird. Durch die Hohllinse werden sie wieder von der Achse abwärts gebrochen, und vereinigen sich in dem Punkt P. Man kann die Entfernung des leuchtenden Punktes in Beziehung auf das Hohlglas = $- 5$ Zoll setzen, und erhält daher $F = AP = \frac{-5 . -10}{-5 + 10}$

$= \frac{50}{5} = 10$ Zoll, welches als die Brennweite der vereinten Gläser anzusehen ist.

Ist die Hohllinse die vordere, so werden die mit der Achse parallel auffallenden Strahlen so gebrochen, als kämen sie aus einem 10 Zoll entfernten Punkte vor dem Glase her. Dieser ist daher als der leuchtende Punkt in Beziehung auf das erhabene Glas zu betrachten; folglich die Vereinigungsweite der Strahlen $= \frac{10 \cdot 5}{10 - 5} = \frac{50}{5} = 10$ Zoll also eben so groß, wie im ersten Fall.

Es ist also in Absicht auf die Brennweite eines solchen zusammengesetzten Glases einerley, ob die erhabene, oder die hohle Linse dem Gegenstande zugekehrt ist.

251. Es sey SATB (Fig. 40.) der Durchschnitt eines solchen Glases, $CA = R$; $DB = r$, $AB = t$, NM der Weg eines Hauptstrahls, L der Durchschnittspunkt desselben mit der Achse, $AL = x$ der gesuchte Abstand.

Soll der Strahl NM ungebrochen durchgehen, so müssen die unendlich kleinen Bogen in N und M einander parallel laufen d. h. die Tangenten der Bogen in diesen Punkten müssen parallel seyn. Dann müssen auch die Halbmesser CN und DM, die auf den Tangenten senkrecht stehen, parallel seyn. Folglich ist Dr. CNL $\sim$ DML; und $CN : CL = DM : DL$ d. i. $R : R - x = r : r - (t - x)$; woraus sich $x = \frac{Rt}{R + r}$ ergiebt.

1. Zus. Ist $R = r$; so wird $x = \frac{1}{2}t$. Bey dem planconvexen Glase ist entweder R oder $r = \infty$ und daher $x = t$ oder = Null. Bey dem Meniskus ist x entweder $= -\frac{Rt}{r - R}$, oder $= \frac{Rt}{R - r}$, je nachdem die erhabene oder die hohle Seite dem Gegenstande zugekehrt ist. Es ist in beyden Fällen der-

selbe Punkt der Achse, aber die Lage desselben gegen die vordere Seite des Glases verschieden.

2. Zus. Bey dem concav-concaven Glase ist sowohl R, als r negativ, und daher ebenfalls $x = \frac{Rt}{R+r}$. So auch bey dem plan-concaven $x = t$ oder $=$ Null; und bey dem convex-concaven $x = \frac{Rt}{R-r}$, wenn die erhabene Fläche, $x = -\frac{Rt}{r-R}$, wenn die hohle dem Gegenstande zugekehrt ist.

252. Es sey der Abstand des Gegenstandes von dem erhabenen Glase $= x$; von dem hohlen also $= a - x$. Alsdann ist der Abstand des Bildes von dem erhabenen Glase $= \frac{fx}{x-f}$; von dem hohlen $= \frac{(a-x)f}{a-x+f}$. Die Größe des erstern Bildes verhält sich zu der des Gegenstandes, wie $\frac{fx}{x-f} : x = f : x - f$. Die Größe des andern verhält sich zu der des Gegenstandes, wie $\frac{(a-x)f}{a-x+f} : (a-x) = f : a - x + f$. Folglich verhält sich die Größe des erstern Bildes zu der des zweyten $= a - x + f : x - f$; und da dieses Verhältniß $= m : n$ seyn soll, so erhält man $n(a - x + f) = m(x - f)$; woraus sich ergiebt $x = \frac{an}{m+n} + f$.

Zus. Sollen beyde Bilder an Größe gleich werden, also $m = n$; so wird $x = \frac{1}{2}a + f$.

253. Es sey ST (Fig. 41.) der Durchschnitt eines Hohlspiegels; O der leuchtende Punkt in der Achse, $AO = a$; CA der Halbmesser $= r$; ON der auffallende, BN der zurückgeworfene Strahl, $AB = BN = F$; der Winkel $x = y$.

Der Punkt N muß der Mitte des Spiegels A sehr nahe gedacht werden.

Dann ist $ON : OC = \sin C : \sin x$
und $CB : BN = \sin y : \sin C$

folglich $ON . CB = OC . BN$
d. i. $a . (r - F) = (a - r) F$

woraus $F = \frac{ar}{2a - r}$ folgt.

224. 1) Für $a = \infty$ wird $F =$ der Brennweite $f = \frac{1}{2}r$; 2) für $a = r$ wird $F = r$; 3) für $a < r$ aber $> \frac{1}{2}r$ wird $F > r$; 4) für $a = \frac{1}{2}r$ wird $F = \infty$; 5) für $a < \frac{1}{2}r$ wird F negativ und zwar, wenn man $a = \frac{1}{2}r - d$ setzt, $= - \frac{\frac{1}{2}r - d}{2d} r$. In diesem Fall erscheint das Bild des leuchtenden Punktes hinter dem Spiegel, und desto weiter, je kleiner d ist.

253. Da die Brennweite eines Hohlspiegels der Hälfte seines Halbmessers gleich ist, so ist in diesem Fall die Vereinigungsweite $= \frac{45 . 18}{90 - 18} = 11\frac{1}{4}$ Zoll.

256. Man setze: $2\frac{1}{2} = \frac{100 r}{200 - r}$; woraus sich $r = 4\frac{36}{41}$ und $f = 2\frac{18}{41}$ Fuß findet.

257. Hier wird die in der Formel für F durch a bezeichnete Größe gesucht (253.); und sie findet sich leicht = 60 Fuß.

258. Die Entfernung des Bildes ist = 60 Zoll, die Vergrößerung 5fach.

259. Die Vereinigungsweite wird negativ $= - 13\frac{1}{3}$ Zoll d. h. das Bild erscheint so weit hinter dem Spiegel; und die Vergrößerung ist $= 13\frac{1}{3} : 5 = 2\frac{2}{3}$ mal.

260. Der Halbmesser des erhabenen Spiegels ist in Vergleich mit dem des Hohlspiegels als negativ zu betrachten. Daher 1) $F = - \frac{ar}{2a + r}$; 2) $f = - \frac{1}{2}r$; 3) für $a = \frac{1}{2}r$ ist $F = - \frac{1}{4}r$; 4) für $a < \frac{1}{2}r$ wird auch $F < - \frac{1}{4}r$.

261. Das Bild erscheint jedesmal hinter dem Spiegel und zwar 1) 6 Zoll, unendlich klein; 2) 4 Zoll, $\frac{1}{3}$ so groß

als der Gegenstand; 3) 3 Zoll, $\frac{1}{2}$ so groß; 4) 2 Zoll, $\frac{3}{8}$ so groß. Das Bild rückt der Oberfläche des Spiegels um so näher, je kleiner die Entfernung des Gegenstandes, nimmt aber an Größe zu.

262. Es sey ST (Fig. 42.) der Durchschnitt des Hohlspiegels, AP die Achse desselben, O der leuchtende Punkt, mn der Planspiegel, ON ein auffallender Strahl. Dieser würde, in der Richtung NB zurückgeworfen, die Achse in dem Punkt B, 9 Fuß von dem Spiegel, durchschneiden; er wird aber von dem Planspiegel, mn, in a aufgefangen und nach b zurückgeworfen. Da man sich N unendlich nahe an A zu denken hat, so liegt auch a unendlich nahe bey der Achse und Na ist $= 7\frac{1}{2}$ Fuß; folglich $ab = aB = 1\frac{1}{2}$ Fuß; und da b so weit vor den Planspiegel fällt, als B hinter demselben liegt, so ist der Abstand des Bildes in b von dem Planspiegel $= \frac{1}{2}Bb = \frac{1}{2}\sqrt{(2aB^2)} = \frac{1}{2}aB\sqrt{2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ $= 1{,}0606\,..$ Fuß.

263. Es sey der Halbmesser beyder Spiegel $= r$, der Abstand des Gegenstandes von der Mitte des Hohlspiegels $= x$, so ist das Bild des Hohlspiegels $\frac{rx}{2x-r}$ mal von demselben entfernt, und es verhält sich die Größe des Gegenstandes, G, zu der des Bildes, B, d. i. $G : B = x : \frac{rx}{2x-r} = 2x - r : r$.

Der Abstand des Gegenstandes vom erhabenen Spiegel ist $= a - x$; die Entfernung des Bildes, welches der erhabene Spiegel macht, von diesem $= -\frac{(a-x)r}{2(a-x)+r}$, und das Verhältniß dieses Bildes, B′, zum Gegenstand, G, d. i.
$B' : G = \frac{(a-x)r}{2(a-x)+r} : a - x = r : 2(a-x) + r.$
Aus dieser und der vorigen Proportion ergiebt sich durch Zusammensetzung $B : B' = 2(a-x) + r : 2x - r$; und da

dieses Verhältniß $= m : n$ seyn soll, so ist $(2x - r)m = (2a - 2x + r)n$. Daraus ergiebt sich $x = \frac{an}{m+n} + \frac{1}{2}r$.

264. Alsdann braucht man nur in dem Ausdruck für x $m = n$ zu setzen, wodurch $x = \frac{1}{2}(a + r)$ wird.

265. Es sey der Halbmesser des hohlen Spiegels $= R$, der des erhabenen $= r$; dann wird $x = \frac{2anR + (m+n)Rr}{2(nR + mr)}$.

266. Es sey ST (Fig. 43.) der Durchschnitt eines Hohlspiegels, AB die Achse, C der Mittelpunkt der Kugelfläche, $CA = CM = r$; $\angle ACM = u$, F der Brennpunkt, LM der einfallende, MN der zurückgeworfene Strahl, der die Achse in f schneidet; alsdann ist Ff die Längenabweichung, das aus F herabgelassene Perpendickel, Fg, die Seitenabweichung, Winkel $x = y = u$.

Es ist aber $CM : Cf = \sin AfM : \sin y$ d. i. $r : Cf = \sin 2u : \sin u$. Folglich $Cf = \frac{\sin u}{\sin 2u} \cdot r = \frac{r}{2 \cos u}$; und $Ff = Cf - \frac{1}{2}r = \frac{r}{2 \cos u} - \frac{1}{2}r = \frac{1 - \cos u}{2 \cos u} r$.

Hieraus folgt, daß die Längenabweichung um so größer wird, je mehr u wächst.

Um die Seitenabweichung, Fg, zu finden, fälle man aus M das Perpendickel MP. Dann ist $Pf : MP = Ff : Fg$ d. i. $\cos PfM : \sin PfM = \frac{1 - \cos u}{2 \cos u} r : Fg$; oder, da $PfM = y + u = 2u$ ist, $\cos 2u : \sin 2u = \frac{1 - \cos u}{2 \cos u} r : Fg$.

Folglich $Fg = \frac{\sin 2u}{\cos 2u} \cdot \frac{1 - \cos u}{2 \cos u} r = \frac{\sin u (1 - \cos u)}{\cos 2u} r$

Auch diese Größe wächst, je größer u wird.

267. Dieses Verhältniß ergiebt sich aus den für Ff und Fg gefundenen Ausdrücken, nämlich

$$Ff : Fg = \frac{1 - \cos u}{2 \cos u} : \frac{\sin u \cdot (1 - \cos u)}{\cos 2u} =$$

$\cos 2u : 2 \cos u \sin u = \cos 2u : \sin 2u$. Dasselbe ergiebt sich auch aus Fig. 43. wo Ff der Cosinus, Fg der Sinus des Winkels Ffg = 2u, in Beziehung auf denselben Sinus totus, fg, ist.

268. Man setze in die Ausdrücke für die Abweichungen in 266. —r anstatt r, so erhält man die Abweichungen bey dem erhabenen Spiegel.

Bey gleichen Halbmessern des hohlen und erhabenen Spiegels und gleicher Größe des Winkels u, sind auch die Abweichungen bey beyden gleich groß, und nur in ihrer Lage gegen den Spiegel verschieden: bey dem hohlen vor, und bey dem erhabenen hinter dem Spiegel.

269. Die Längenabweichung beträgt 0,385; die Seitenabweichung 0,323 Zoll.

270. Wenn $\cos 2u = \sin 2u$ ist, d. i. bey einem Winkel $u = 22\frac{1}{2}$ Grad.

271. Jederzeit als ein vollständiger Kreis. Es sey ACB (Fig. 44.) ein Winkelspiegel. Man beschreibe aus C den vollständigen Kreis, ABabA, so bildet sich in jedem Spiegel der vor der Ebene desselben liegende Halbkreis ab: in dem Spiegel AC der Halbkreis ABa; in dem Spiegel BC der Halbkreis BAb. Denn von dem Punkt A erscheint in dem Spiegel BC ein Bild in a', so weit hinter dem Spiegel, als A vor demselben liegt; und von dem Punkt B erscheint in dem Spiegel AC ein Bild in b' so weit hinter demselben, als B vor demselben liegt; und eben so fällt das Bild des ganzen Bogens AB, oder vielmehr des ganzen Ausschnittes ACB, sowohl zwischen B und a', als zwischen A und b'.

Das Bild in a' ist dann als ein zweyter Gegenstand in Absicht auf den Spiegel AC zu betrachten, und es entsteht in diesem wiederum ein Bild des Bildes in a', das so weit hinter der Ebene des Spiegels AC liegt, als a' vor derselben; es fällt hier mit dem Punkt b zusammen. Mit andern Worten: die von A auf den Spiegel BC fallenden Strahlen werden von diesem so zurückgeworfen, als kämen sie von dem Punkt a' her. Ein Theil von diesen trifft auf den Spiegel

AC und wird von diesem so zurückgeworfen, als kämen sie von dem Punkte b, welcher daher als das Bild von a′ erscheint. Eben so werden die von B auf den Spiegel AC fallenden Strahlen von diesem so zurückgeworfen, als kämen sie aus b′. Ein Theil von diesen trifft auf den Spiegel BC, und wird von diesem so zurückgeworfen, als kämen sie aus dem Punkte a; daher dieser als das Bild von b′ erscheint.

Was aber von den Punkten a′ und b′ gilt, gilt auch von dem ganzen Bogen Ba′ und Ab′, ingleichen von den ganzen Ausschnitten, BCa′ und ACb′: von jenem entsteht in dem Spiegel AC das Bild b′Cb, von diesem in dem Spiegel BC das Bild a′Ca.

Endlich, so wie von dem Bilde in a′ ein neues Bild in dem Spiegel AC, in b, entsteht, so entsteht von dem ganzen Bogen aa′ oder vielmehr von dem ganzen Ausschnitt a′Ca, in dem Spiegel AC das Bild bCa; und auf gleiche Weise von dem Ausschnitt b′Cb in dem Spiegel BC, das Bild aCb.

Die beyden letzten Bilder fallen also zusammen und sind eigentlich doppelt; erscheinen aber im Spiegel nur einfach, und selbst schwächer erleuchtet, als die andern; weil nicht nur bey jeder neuen Zurückwerfung ein Theil der Lichtstrahlen, wegen der Unvollkommenheit der Spiegel, verloren geht, sondern auch von der zurückgeworfenen Menge immer nur ein Theil zur Hervorbringung des neuen Bildes angewandt wird.

Wenn, so wie hier, die Größe des Winkels, welchen die Spiegel mit einander machen, in 360 aufgeht, so ist die Anzahl der Bilder um 1 kleiner, als der Quotient. Hier beträgt der Winkel 60 Grad; der Quotient ist also 6, und die Anzahl der Bilder $6 - 1 = 5$. Ist der Quotient $= n$, so erscheint der ganze Kreis in n Ausschnitte getheilt. Von diesen ist der zwischen den Spiegeln liegende das Objekt, und die übrigen $n - 1$ die Bilder desselben.

Geht der Winkel ACB in 360 nicht auf, ist er z. B. $(n + \frac{p}{q})$ mal darin enthalten, so erscheinen in den Spiegeln

n — 1 Ausschnitte von der Größe des gegebenen, und ein kleinerer $= \frac{p}{q}$ desselben. Ist z. B. ACB = 50 Grad, so erscheinen 6 vollständige Bilder, des Ausschnittes, und ein kleineres $= \frac{1}{5}$ ACB. Legt man dann in die Mitte des Bogens AB einen kleinen hellen Gegenstand, so erscheinen nur 6 Bilder davon, und auf den Bogen des kleinern fällt keines.

Ist aber $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$ oder $> \frac{1}{2}$, so erscheinen im Spiegel n — 1 Ausschnitte, von denen der mittlere größer, als die andern, ist; und bringt man dann einen Gegenstand in die Mitte von AB, so werden n Bilder davon sichtbar, von welchen die beyden mittlern näher bey einander liegen, als die andern.

Ist z. B. der Winkel ACB = 80 Grad, so ist der Quotient $= 4\frac{1}{2}$. Es entstehen daher nur 3 Bilder im Spiegel, von welchen das mittlere größer, als die beyden andern, ist. Legt man aber in die Mitte des Bogens AB einen kleinen Gegenstand, so erscheinen 4 Bilder desselben, von welchen 2 auf dem mittlern Bogen und einander näher liegen, als die andern.

Hält man in dem letztern Fall das Auge nicht gerade in der Mitte zwischen beyden Spiegeln, sondern nähert es mehr dem einem oder dem andern, so kommt auch der (n — 1ste) Ausschnitt vollständig zum Vorschein, und überdieß noch ein kleinerer.

272. Das Bild im Spiegel rückt demselben näher, oder entfernt sich von ihm, je nachdem der Spiegel sich dem Gegenstande nähert, oder von ihm entfernt; aber der Weg, welchen es zurücklegt, ist noch einmal so groß, als der, welchen der Spiegel durchläuft. Denn es sey MN (Fig. 45.) die gerade Linie, der Spiegel, AB, befinde sich in O, der Gegenstand in C; alsdann fällt das Bild in D, so daß OD = CO ist. Der Spiegel bewege sich von O nach f; dann rückt das Bild von D nach g, so daß fg = Cf ist.

Es ist aber $Cf = CO + Of$

$fg = Og - Of = OD + Dg - Of.$

Folglich $CO + Of = OD + Dg - Of$. Hiervon abgezogen

$CO = OD$

bleibt $Of = Dg - Of$. Folglich $Dg = 2\,Of$.

Auf ähnliche Weise wird der Beweis geführt, wenn der Spiegel nach der entgegengesetzten Seite, dem Gegenstande näher, rückt.

273. Das Bild bleibt auf der senkrechten Linie, macht aber einen Weg, der dem doppelten Wege des Spiegels, mit dem Cosinus des Neigungswinkels multiplizirt, gleich ist.

Es sey wieder AB (Fig. 46.) der Spiegel, MN die auf der Ebene desselben senkrechte, der Gegenstand befinde sich in C, das Bild desselben in D. Der Spiegel bewege sich längs der Linie PR, die unter dem Winkel x gegen MN geneigt ist, von O nach f. Man fälle aus f das Perpendikel fh, und mache $hg = Ch$, so bezeichnet Dg den Weg des Bildes.

Es ist aber $CO = OD = Dg + Og$,

ingleichen $CO = Ch + Oh = hg + Oh = 2\,Oh + Og.$

Folglich $Dg + Og = 2\,Oh + Og$

und $Dg = 2\,Oh = 2\,Of \,.\, \cos x.$

Für $x = 0$ wird $\cos x = 1$, und $Of = Oh$; man erhält also den Fall in 272. — Für $x = 90$ wird $\cos x = 0$ also auch $Dg = 0$ d. h. das Bild verändert seine Stelle nicht, wenn der Spiegel senkrecht gegen MN auf- oder niederwärts bewegt wird. Für $x > 90$ wird $\cos x$ negativ, also auch Dg negativ, d. h. das Bild bewegt sich nach der entgegengesetzten Seite, die Größe seines Weges aber bleibt dieselbe.

Es kann also der Ausdruck für Dg als die allgemeine Auflösung für alle Fälle gelten.

274. Es sey, wie in den vorhergehenden Aufgaben, AB (Fig. 47.) der Spiegel, MN die auf seiner Ebene senkrechte, der Gegenstand befinde sich in C, das Bild desselben in D, — also $CO = OD$. Der Spiegel drehe sich um den in O auf AB und MN senkrechten Durchschnitt nach ab, um

den Winkel AOa = x; dann findet sich der Ort des Bildes, wenn man aus C auf die verlängerte ab, die senkrechte CE zieht, diese verlängert und Ef = CE macht. f ist der Ort des Bildes. Zieht man darauf Df, so ist in dem Dreyeck CDf CO : OD = CE : Ef; folglich Df || OE und $\angle$ DfC = OEC = einem rechten. Also f ein Punkt in der Peripherie des Halbkreises DfC.

Es ist ferner x + u = u + y = einem rechten; folglich x = y und Df = CD sin x = 2 CO sin x. Während also der Spiegel sich um den Winkel x gedreht hat, ist das Bild durch den Bogen Df gegangen, dessen Sehne dem doppelten Abstande des Gegenstandes von dem Spiegel, mit dem Sinus des Winkels x multiplizirt, gleich ist.

Der Halbkreis, dessen Halbmesser der Abstand des Gegenstandes vom Spiegel ist, ist der geometrische Ort für den Stand des Bildes, während der Umdrehung des Spiegels.

Geschieht die Umdrehung des Spiegels um einen vertikalen Durchschnitt, so beschreibt das Bild ebenfalls einen Halbkreis, auf dessen Ebene der vertikale Durchschnitt senkrecht steht. Übrigens bleiben die Verhältnisse dieselben, wie bey dem ersten Fall; wie leicht erhellet, wenn man sich die durch MN und AB gelegte Ebene, als horizontal, und den Durchschnitt in O, als vertikal denkt.

275. 86 Fahr. 30 Centes.

276. — $3\frac{5}{9}$ R. — $4\frac{4}{9}$ Centes.

277. Es sey die Anzahl der gegebenen Grade = m, so sind m Fahr. = $\frac{m-32}{9}$ 4 Reaum. = $\frac{m-32}{9}$ 5 Centes.

m R. = $(\frac{9}{4}m + 32)$ F. = $\frac{5}{4}$m Cent.

m C. = $(\frac{9}{5}m + 32)$ F. = $\frac{4}{5}$m R.

278. Nach der Richmannischen Regel (S. mein Lehrb. der Physik §. 322.) ist die Temperatur der Mischung im ersten Augenblick $46\frac{1}{2}$ Grad.

279. Wird die Temperatur der Mischung = x gesetzt, so ist das, was das Leinöl an Wärme verliert, = 7(60 — x).

Durch diese Wärmemenge sollen die 3 Pfund Wasser von 15 Gr. auf x Gr. erhöht werden, also einen Zuwachs von 3 (x — 15) erhalten. 3 Pf. Wasser aber erfordern zur Erhöhung ihrer Temperatur eben so viel Wärmestoff, als 6 Pf. Leinöl zu einer gleichen Erhöhung. Man erhält daher die Gleichung $7(60-x) = 6(x-15)$; woraus sich $x = 39\frac{3}{13}$ Gr. ergiebt.

280. Um das Leinöl auf 20 Gr. zu bringen, muß es einen Zuwachs von $5(20-12) = 40$ erhalten. Diese Wärmemenge muß das Wasser hergeben. Ist also die Temperatur desselben $= x$, so ist das, was es an Wärmestoff verliert $= 2(x-20)$. Dadurch könnten aber 4 Pf. Leinöl um $x-20$ Gr. erhöht werden. Die Gleichung ist also $4(x-20) = 40$; und $x = 30$ Gr.

281. Wird $T > t$ gesetzt, so ist das, was A an Wärmestoff abgiebt $= MS(T-x)$, und das was B erhält $= ms(x-t)$; folglich $MS(T-x) = ms(x-t)$, und $x = \frac{MST + mst}{MS + ms} = T - \frac{ms(T-t)}{MS+ms}$.

282. So weit, als man von der Spitze eines so hohen Berges sehen kann; und dieß findet sich auf folgende Weise: Es stelle der Kreis um C (Fig. 48.) die Erdkugel vor, AB die Berghöhe; man ziehe aus A die Tangente AD; dann bezeichnet der Bogen BD, als das Maaß des Winkels x, die Weite der Aussicht. Es ist aber CA : CD = 1 : cos x d. i. $(r+h) : r = 1 : \cos x$, — wenn r den Halbmesser der Erde, und h die Berghöhe bedeutet, — folglich $\cos x = \frac{r}{r+h}$. Wenn also $r = 19{,}632100$ par. Fuß, und $h = 5000$ Fuß so ist $BD = 19\frac{2}{3}$ geogr. Meilen.

Befindet sich das Auge 5 Fuß über der Erdfläche, so muß zu dieser Entfernung noch die Weite der Aussicht aus einer Höhe von 5 Fuß hinzugefügt werden. Um diese zu finden, ziehe man die Sehne BD. Dann ist $AB : BD = \sin\frac{1}{2}x : \sin(90-x)$

d. i. $h : 2r \sin \frac{1}{2}x = \sin \frac{1}{2}x : \cos x$, und $h = \frac{2r \sin \frac{1}{2}x^2}{\cos x}$ oder, da, bey der Kleinheit des Winkels x der cos x vom Sinus totus nicht merklich verschieden ist, $h = 2r \sin \frac{1}{2}x^2$; folglich $\sin \frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{h}{2r}}$ oder $\sin x = 2\sqrt{\frac{h}{2r}} = \sqrt{\frac{2h}{r}}$; wornach die Weite der Aussicht = $\frac{5}{8}$ Meilen ist.

283. Man suche, wie hoch der Berg seyn muß, von dessen Spitze man 20 Meilen weit sehen kann — was sich aus der Gleichung für cos x bey der vorhergehenden Aufgabe leicht finden läßt, wenn man $x = 1^0 20'$ setzt — und ziehe die gefundene Höhe von 10000 ab. Man erhält 4700 Fuß für den noch sichtbaren Theil des Ätna's

284. Die Halbmesser der Parallelkreise, folglich auch ihre Umfänge verhalten sich wie die Cosinus der Breite; daher der Umfang des gesuchten Parallelkreises = $5400 \cdot \cos 45^0 \doteq 3818{,}3$ geogr. Meilen.

285. Es sey der Grad der Breite = x, so ist $\cos x = \frac{m}{5400}$.

286. Man bezeichne die Längen der beyden Örter durch L und l, ihre Breiten durch B und b, und die Entfernung derselben von einander, in Graden eines größten Kreises ausgedrückt, durch x; alsdann ist

$$\cos x = \cos B \cdot \cos b \cdot \cos(L - l) \pm \sin B \cdot \sin b.$$

Es sey nämlich NASQ (Fig. 49.) die Erdkugel, N und S die beyden Pole, AQ der Äquator, O und P die beyden Örter, also OE = B, PD = b, AE = L, AD = l, OP ein Bogen eines größten Kreises von x Graden; alsdann ist NOP ein sphärisches Dreyeck, in welchem NP = 90 — b, NO = 90 — B, der Winkel ONP = L — l ist, und es kommt darauf an, aus 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite zu finden. (S. mein Lehrb. der reinen Math. S. 574.)

Bey der Anwendung dieser Formel erinnere man sich, daß $\sin(90-b) = \cos b$; $\cos(90-b) = \sin b$ ist.

Das + Zeichen in der Formel gilt, wenn B und b gleichartig d. i. beyde nördlich oder südlich; das − Zeichen, wenn sie ungleichartig sind.

Will man die Entfernung in geogr. Meilen haben, so multiplizire man x mit 15.

Für $L - l = o$ wird $\cos x = \cos(B \mp b)$, oder $x = B \mp b$. Für B und $b = o$ wird $\cos x = \cos(L - l)$ oder $x = L - l$. Für $B = b$ wird $\cos x = \cos B^2 . \cos(L - l) + \sin B^2$.

Da die Formel für $\cos x$ etwas Unbequemes in der Anwendung hat, so kann man ihr durch Annahme eines Hülfswinkels, y, eine bequemere Gestalt geben. Man dividire nämlich die Gleichung durch $\sin B$, d. i.

$\frac{\cos x}{\sin B} = \cot B . \cos b . \cos(L - l) \pm \sin b$, und setze $\cot B . \cos(L - l) = \cot y$; so ist $\frac{\cos x}{\sin B} = \cot y . \cos b \pm \sin b = \frac{\cos y . \cos B \pm \sin y . \sin b}{\sin y} = \frac{\cos(y \mp b)}{\sin y}$; folglich $\cos x = \frac{\sin B . \cos(y \mp b)}{\sin y}$.

287. Die Entfernung beyder Städte von einander beträgt $349\frac{2}{3}$ Meilen.

288. Die angegebene Länge von R. J. ist die östliche. Diese von 360 abgezogen, giebt die westliche $= 25^0\ 37'\ 50''$; und betrachtet man diese als der östlichen entgegengesetzt, so muß in der Formel für $\cos x$, $L + l$ anstatt $L - l$ gesetzt werden, also $43^0\ 12'\ 3''$. Alsdann findet sich $x = 83^0\ 30' = 1252\frac{1}{2}$ Meile.

289. In diesem Fall ist $b = o$, folglich $\cos b = 1$, und $\sin b = o$; daher $\cos x = \cos B . \cos(L - l)$; und da $\cos 112^0\ 30'$ negativ ist, so wird auch $\cos x$ negativ. Man muß also für x den dem gefundenen Logarithmen zugehörigen stumpfen Winkel nehmen. Hiernach ist $x = 104^0\ 40' = 1570$ Meilen.

290. Es sey AEQLP (Fig. 50.) die Himmelskugel, P der Weltpol, AQ der Äquator, EL die Ecliptik, p der Pol derselben, S das Gestirn; so ist CD die gerade Aufsteigung, SD die Abweichung, CB die Länge, SB die Breite des Ge-

stirns, LQ, das Maaß der Schiefe der Ecliptik, = O. Es kommt nun darauf an, in dem sphärischen Dreyeck PSp die Seite Sp, als die Ergänzung der Breite SB, und den Winkel PpS, dessen Maaß der Bogen BL, die Ergänzung der Länge CB, ist, zu finden. In diesem Dreyeck ist PS = 90 — D, Pp = LQ = O; $\angle$SPp = AD = 90 + A. Man hat also aus 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel 1) die dritte Seite, 2) den einen der gegenüberstehenden Winkel zu finden. Es ist aber

1) $\cos Sp = \sin B = -\sin O \,.\, \cos D \,.\, \sin A + \cos O \,.\, \sin D.$

2) $\cos L = \frac{\cos A \,.\, \cos D}{\cos B}$; oder

$$\cot L = \frac{\cos A}{\sin O \,.\, \mathrm{tg}\, D + \cos O \,.\, \sin A}.$$

Man kann auch hier durch Einführung eines Hülfswinkels, y, wie in 286, indem man die Gleichung durch $\sin D$ dividirt, und $\cot D \,.\, \sin A = \cot y$ setzt, einen bequemern Ausdruck erhalten, nämlich: $\sin B = \frac{\sin D \,.\, \sin (y - O)}{\sin y}$.

291. Die Breite ist $= 5^0\, 8'\, 56''$, die Länge $= 62^0\, 6'\, 57''$.

292. Der Sinus der geraden Aufsteigung ist $= \sin (A - 180) = \sin 53^0\, 48'\, 56''$, negativ genommen; und da auch die Abweichung als negativ anzusehen ist, so wird cot y positiv, und der Hülfswinkel $y = 29^0\, 27'\, 19''$. Alsdann wird sin B negativ und $B = 5^0\, 2'\, 54''$ südlich. Der Cosinus der Länge ist auch negativ, und der dem Logarithmen desselben (9,7318413) zugehörige Bogen ist daher entweder $180 - 57^0\, 21'\, 27''$ oder $180 + 57^0\, 21'\, 27'' = 237^0\, 21'\, 47''$. Hier gilt wegen der südlichen Abweichung der letztere Werth.

293. Es sey PZHQR (Fig. 51.) die Himmelskugel, HR der wahre Horizont des Ortes, für welchen die Aufgabe gilt, P der Pol, PR die Polhöhe des Ortes, AQ der Äquator, s das Gestirn, DS die Abweichung desselben, mS der halbe Tagebogen. Es ist mS $\sim$ AD, und AD das Maaß des Winkels x; es kommt also darauf an, diesen zu finden. Nun ist in dem sphärischen rechtwinkligen Dreyeck HPS die Seite HP

$= 180 - PR$; und die Seite $PS = 90 - DS$; folglich ist

$$\cos x = \frac{tg HP}{tg PS} = \frac{- tg PR}{\cot DS} = - tg PR \cdot tg DS.$$

Substituirt man für PR und Ds die gegebenen Zahlen, so findet man für x $49^0\ 1'\ 49''$ oder $130^0\ 58'\ 11''$, und der negative Werth des Cosinus zeigt an, daß hier der stumpfe Winkel gilt. Die Dauer des halben Tagebogens beträgt hiernach 8 St. 43 Min. 52 Sec.

294. Die Rechnung ist wie bey der vorigen Aufgabe zu machen, und der gefundene halbe Tagebogen mit 2 zu multipliziren. Hiernach ist der längste Tag in Neapel 14 St. 56 Min. 18 Sec. — in Paris 15 St. 58 Min. 10 Sec. — in Petersburg 18 St. 28 Min. 47 Sec.

295. Es sey der Kreis (Fig. 52.) die Himmelskugel, HR der wahre Horizont von Berlin, PR die Polhöhe, AQ der Äquator, mn der Parallelkreis, in welchem sich die Sonne befindet, S die Sonne, SD die Abweichung derselben, Z das Zenith, SB die gesuchte Höhe der Sonne um 10 Uhr und Hm die Höhe derselben um Mittag.

Die letztere ist = dem Ergänzungswinkel, HCA, der Polhöhe, + der Abweichung, Am = SD, d. i.

$$37^0\ 29'\ 44'' + 15^0\ 10'\ 25'' = 52^0\ 40'\ 9''.$$

Die Größe des Bogens SB findet sich aus dem sphärischen Dreyeck, ZPS, in welchem $ZP = 90 -$ Polhöhe; $PS = 90 -$ der Abweichung, und der eingeschlossene Winkel, x, als Stundenwinkel, = 30 Grad. Es ist

$\cos ZS = \sin ZP \cdot \sin PS \cdot \cos x + \cos ZP \cdot \cos PS$ d. i.

$\sin SB = \cos PR \cdot \cos SD \cdot \cos x + \sin PR \cdot \sin SD$, woraus sich $SB = 45^0\ 45'\ 28''$ ergiebt.

296. Die Rechnung ist der vorhergehenden gleich; nur ist jetzt in dem Dreyeck ZPS die Seite $PS = 90^0 +$ der Abweichung, und der Stundenwinkel $x = 45^0$. Man erhält daher jetzt $\sin SB = \cos PR \cdot \cos SD \cdot \cos 45 - \sin PR \cdot \sin SD$, woraus sich die Höhe $= 18^0\ 9'\ 53''$ ergiebt.

297. Man muß zuerst die Höhe der Sonne über dem

Horizont von Teneriffa um diese Zeit suchen — wie in 295 —. Sie ist $= 14^0\,57'\,53''$. Alsdann findet sich die Länge des Schattens durch eine ähnliche Rechnung, wie in 206. Sie ist $= 42725$ Fuß.

298. Es sey PR (Fig. 51.) die Polhöhe von Gotha, SD die Abweichung der Sonne am längsten Tage $= 23^0\,28'$, so ist CS die Morgenweite. Man hat daher in dem rechtwinkligen Dreyeck CSD die Proportion $\sin C : \sin SD = 1 : \sin CS$ d. i. $\cos PR : \sin SD = 1 : \sin CS$; woraus $CS = 39^0\,12'\,11''$ folgt.

299. Aus dem Dreyeck CSD bey der vorigen Aufgabe ergiebt sich leicht $\sin M = \pm \frac{\sin D}{\cos P}$.

Das Zeichen + zeigt nördliche, das Zeichen — südliche Morgen- oder Abendweite an. Die erstere ist darin stets der letzteren gleich.

300. Wenn $\sin D = \cos P$ ist, d. h. wenn die Abweichung des Gestirns dem Ergänzungswinkel der Polhöhe gleich ist. In diesem Fall berührt das Gestirn nur den Horizont, und geht entweder nicht auf, oder nicht unter. Auf- und Untergang desselben fallen dann zusammen.

301. Man rechnet hierbey, daß die Sonne in einem Monate 30 Grade der Ecliptik durchläuft. Nach 2 Monaten ist also ihre Länge = 60 Grad. Es kommt darauf an, ihre Abweichung alsdann zu bestimmen. Wird diese = D gesetzt, so ist $\sin D = \sin 60 \,.\, \sin 23^0\,28'$; und $D = 20^0\,10'\,25''$. Wird dieses von 90 abgezogen, so erhält man den Parallelkreis ($69^0\,49'\,35''$), welchem die Sonne in ihrem Lauf vom 60sten bis zum 120sten Grad der Ecliptik, d. i. 2 Monate hindurch nicht untergeht. (Vergl. mein Lehrb. der math. Geographie 2te Aufl. §. 135.)

302. Der Inhalt einer Kugelzone wird gefunden, wenn man den Umfang des größten Kreises der Kugel mit der Höhe der Zone multiplizirt. (S. mein Lehrb. der reinen Mathem.

§. 285.) Wird der Erdhalbmesser $= r = 859{,}5$ geographische Meilen gesetzt, so ist die Höhe der heißen Zone $= 2r \sin 23^{0}\,28'$; die der gemäßigten $= r(\sin 66^{0}\,32' - \sin 23^{0}\,28')$; die der kalten $= r(1 - \sin 66^{0}\,32')$. Hiernach findet sich

der Flächeninhalt der heißen Zone	= 3,696200	□ Meilen
: : : einer gemäßigten :	= 2,409010	: :
: : : : kalten :	= 383845	: :

203. Die Größe der Erdbahn, als kreisförmig betrachtet, ist = 129,853000 Meilen.

304. Die Erdkugel durchfliegt in 1 Tage noch etwas über 355000, und jede Secunde etwas über 4 Meilen.

Es ist jedoch zu bemerken, daß die Bewegung der Erdkugel um die Sonne nicht ganz gleichförmig geschieht, also nicht einen Tag genau so groß, als den andern ist.

305. Da 4 geograph. Meilen noch über 90000 Fuß betragen, so verhält sich die Geschwindigkeit der Erde zu der einer Kanonenkugel ungefähr wie 90 : 2 d. h. sie übertrifft die Geschwindigkeit der letztern um mehr als das 45 fache.

306. Die Geschwindigkeit, mit welcher fallende Körper sich in der ersten Secunde bewegen, verhält sich wie die Kraft der Schwere, die auf sie wirkt. Diese aber nimmt in verschiedener Entfernung von dem Mittelpunkt der Erde ab, wie das Quadrat der Entfernung zunimmt. Setzt man also die gesuchte Entfernung in geograph. Meilen $= x$; und den Erdhalbmesser $= 859{,}5$ Meilen, so hat man

$$(859{,}5 + x)^2 : 859{,}5^2 = 2 : 1$$

oder $$(859{,}5 + x) : 859{,}5 = \sqrt{2} : 1$$

woraus $x = 356$ Meilen.

307. Die Proportion $1859{,}5^2 : 859{,}5^2 = 15{,}1 : x$ giebt den gesuchten Raum $= 3{,}226..$ Fuß.

308. Die Fallräume in der ersten Sec. stehen im geraden Verhältniß der Massen der Weltkörper, und im umgekehr-

ten der Quadrate ihrer Halbmesser. Man hat hier also die Proportion

$80 . 0,2725^2 : 1 = 15,1 : x$; woraus $x = 2,54..$ Fuß.

309. Es ist $1 . 110^2 : 337086 = 15,1 : x$; woraus $x = 420,65..$ Fuß.

310. Die Höhenmessung der Berge durch das Barometer gründet sich auf den hydrostatischen Satz, daß, wenn in eine doppelte Röhre mit aufwärts gekehrten Schenkeln zwey Flüssigkeiten von verschiedener spezifischer Schwere, die sich nicht chemisch vereinigen, gegossen werden, und zwar in den einen Schenkel die leichtere, in den andern die schwerere, sie in beyden nicht gleich hoch zu stehen kommen, sondern die leichtere höher, als die schwerere. Ihre Höhen stehen im umgekehrten Verhältniß ihrer spezifischen Schweren, d. h., die eine steht so vielmal höher, als die andere, so vielmal sie leichter, als diese ist. Wenn z. B. in den einen Schenkel Quecksilber, in den andern Wasser gegossen würde, so würde die Wassersäule ungefähr 14 mal so groß, als die Quecksilbersäule, seyn, weil die spezifische Schwere des Quecksilbers ungefähr 14 mal so groß, als die des Wassers ist. In dem Barometer soll das Quecksilber mit der Luft, die ungleich dünner, als das Wasser, ist, ins Gleichgewicht gesetzt werden. Dieses Instrument besteht zwar nur aus einer einzigen, oben verschlossenen und unten offenen, Röhre, die das Quecksilber enthält; da es aber ganz in die Flüssigkeit der Luft eingetaucht ist, so ist es so gut, als ob noch eine zweyte, mit Luft gefüllte, Röhre, die bis an die Gränze der Atmosphäre reichte, damit verbunden wäre. Bestände nun die Atmosphäre aus einer Flüssigkeit von durchgehends gleicher Dichtigkeit, so würde eine Säule derselben, die von der Grundfläche der Quecksilbersäule bis an die Gränze der Atmosphäre ginge, so vielmal größer, als diese, seyn, so vielmal das Quecksilber spezifisch schwerer, als die Luft ist. Man rechnet aber, daß das Quecksilber 10465 mal dichter oder spezifisch schwerer, als die Luft ist. Wenn es also im Barometer an der Oberfläche der Erde

28 Par. Zoll, oder 336 Par. Linien hoch stände, so würde die Höhe der Atmosphäre 24418 Par. Fuß betragen. Wenn man dann das Barometer an einen Ort in der Atmosphäre brächte, der um 10465 Linien, oder 72 Fuß 8 Zoll 1 Linie höher läge, so würde das Quecksilber in demselben um 1 Linie fallen; und so oft man um eine gleiche Höhe weiter hinaufstiege, würde es jedesmal um 1 Linie fallen. Dann würde es sehr leicht seyn, aus dem Stande des Barometers an irgend einem Ort, die Höhe desselben über der Oberfläche der Erde zu finden: man brauchte nämlich nur 72 Fuß 8 Zoll 1 Linie mit der Anzahl der Linien, um welche das Barometer gefallen ist, zu multipliziren.

Allein die Dichtigkeit der Atmosphäre ist nichts weniger, als durchgehends gleich; sondern sie nimmt ununterbrochen immer mehr ab, je weiter man sich von der Oberfläche der Erde entfernt. Die Luft ist also, weiter von der Erde ab, spezifisch leichter, als näher bey derselben; und der Druck, welchen sie in verschiedenen Höhen ausübt, nimmt in einem größern Verhältniß ab, als die Höhen zunehmen. Daher werden die Luftschichten, an deren Gränzen der Unterschied in dem Stande des Barometers 1 Linie beträgt, immer größer, je höher man in die Atmosphäre hinaufrückt; oder, wenn man die Luftschichten von gleicher Höhe nimmt, so wird der Unterschied der Barometerstände an den Gränzen einer Schicht desto kleiner, je weiter von der Erde die Schicht liegt.

Nach dem Mariottischen Gesetz steht der Druck, welchen die Luft auszuüben vermag, im geraden Verhältniß ihrer Dichtigkeit; die Dichtigkeit derselben aber an irgend einem Orte hängt von dem Gewicht des darüber liegenden Theils der Atmosphäre ab. Denkt man sich also AP (Fig. 53.) als die Höhe der ganzen Atmosphäre, und Pa, ab, bc u. s. w. als die Höhen von Schichten in ihr, die alle einander gleich und so klein sind, daß die Dichtigkeit einer jeden als durchgehends gleich angesehen werden kann, so werden die Dichtigkeiten dieser Schichten sich wie die Gewichte der Luftsäulen

Aa, Ab, Ac u. s. w. verhalten. Setzt man dann das Gewicht der Luftsäule AP = P, Aa = Q, Ab = R, Ac = S u. s. w. und bezeichnet die Dichtigkeit der untersten Schicht, Pa, durch d; der 2ten, ab, durch d'; der 3ten, bc, durch d'' u. s. w., so ist

$$a)\ d : d' = Q : R$$
$$b)\ d : d'' = Q : S.$$

Es ist aber auch $\alpha)\ P - Q : Q - R = d : d'$
$$\beta)\ P - Q : R - S = d : d''$$

d. h. es verhalten sich auch die Gewichte der Luftschichten selbst, wie die Dichtigkeiten derselben. Denn da die Schichten alle gleich hoch sind, so verhalten sich die Massen derselben — also ihre Gewichte — wie ihre Dichtigkeiten.

Aus den Proportionen a und α erhält man $Q : R = P - Q : Q - R$, folglich $R = \frac{Q^2}{P} = \frac{Q^2}{P^2} P$. Und eben so aus b und β $S = \frac{Q}{P} R = \frac{Q^3}{P^3} P$.

Hiernach läßt sich schließen, daß das Gewicht der nächsten Luftsäule, Ad, $= \frac{Q^4}{P^4} P$; das der darauf folgenden $= \frac{Q^5}{P^5} P$ u. s. w. ist. Und da nun auch $P = P$; $Q = \frac{Q}{P} P$ ist, so machen die Gewichte P, Q, R, S u. s. w. eine geometrische Reihe, deren 1stes Glied P, und Exponent $= \frac{Q}{P}$ ist. Folglich wird das Gewicht, x, der Luftsäule, welche auf die mte Luftschicht drückt $= \frac{Q^m}{P^m} . P$ seyn.

Eben so wie diese Gewichte, machen auch die Dichtigkeiten der Luftschichten, die, wie vorhin bemerkt worden ist, in gleichem Verhältniß mit jenen stehen, eine geometrische Reihe, während die Luftschichten selbst eine arithmetische bilden. Und da die Dichtigkeiten der Luftschichten den Druck bestimmen, welchen diese hervorbringen, und dessen Größe eben durch

den Barometerstand bezeichnet wird, so sind auch die Barometerstände in verschiedenen Höhen als Glieder einer geometrischen, und die ihnen zugehörige Anzahl der Luftschichten als Glieder einer arithmetischen Reihe zu betrachten. Diese Verbindung einer geometrischen Reihe mit einer arithmetischen führt schon von selbst auf Logarithmen und die ihnen zugehörigen Zahlen, da diese gleichfalls Glieder einer geometrischen, und jene Glieder einer arithmetischen Reihe ausmachen. Da aber die Barometerstände immer mehr abnehmen, je höher man in die Luft hinaufsteigt, so denke man sich die unterste Luftschicht als die letzte der Reihe, als die n^{te}, die 2te als die $(n-1)^{ste}$, u. s. w. damit beyde Reihen zugleich ab- oder zunehmen. Alsdann kann man die Barometerstände als Potenzen irgend einer Grundzahl, x, ansehen, deren Exponenten die Ordnungszahlen der Luftschichten sind. Es sey z. B. f der Barometerstand in P, so ist $f = x^n$. An einer andern Stelle sey der Barometerstand y, die Luftschicht daselbst die $(n-p)^{te}$, so ist $y = x^{n-p}$. Folglich ist $n = \log f$; $n - p = \log y$, in dem System, dessen Grundzahl x ist; also auch $n : (n-p) = \log f : \log y$. Und da sich für dieselben Zahlen die Logarithmen eines Systems, wie die eines andern verhalten, so ist auch

$$n : (n-p) = \log . \text{Brigg} . f : \log \text{Br}. y.$$

Ferner ist $n - (n-p) : \log \text{Br}. f - \log \text{Br}. y = n : \log \text{Br}. f$ d. i. $p : n = \log \text{Br}. f - \log \text{Br}. y : \log \text{Br}. f$.

p aber drückt die Höhe des Ortes, an welchem der Barometerstand $= y$ ist, durch die Anzahl der Luftschichten zwischen P und dem Orte aus.

Nun sey an einem andern Orte, dessen Höhe bekannt ist, der Barometerstand $= g$, und die Luftschicht daselbst die $(n-c)^{te}$, so ist auch $c : n = \log f - \log g : \log f$ — wobey ebenfalls Brigg. Logarithmen zu verstehen sind. Aus beyden Proportionen folgt

$$p : c = \log f - \log y : \log f - \log g.$$

p und c drücken zwar eigentlich gewisse Mengen von

Luftschichten aus, die zwischen P und den Orten, wo die Barometerstände = y und g sind, liegen; da aber alle Luftschichten gleich hoch sind, so drücken diese Zahlen das Verhältniß der Höhen selbst aus. Ist also die Höhe der $(n-c)^{ten}$ Luftschicht bekannt, so giebt diese Proportion auch die Höhe der $(n-p)^{ten}$ in demselben Längenmaaße, ohne daß man nöthig hat, sich weiter um die Anzahl der Schichten selbst zu bekümmern. Nennt man also die Höhen selbst p und c, so ist

$$p = \frac{c}{\log f - \log g} \cdot (\log f - \log y).$$

Das Quecksilber ist, wie oben bemerkt wurde, 10465 mal dichter, als die Luft unten an der Erde. Dieß gilt für einen Barometerstand von 0,76 Meter = 336,90496 Par. Linien und bey einer Temperatur = 0 Reaum. In einer Entfernung also von 0,10465 Par. Fuß von der Erde wird das Barometer um 0,00001 Par. Fuß = 0,00144 Lin. fallen, also der Stand desselben = 336,90352 Lin. seyn. Hiernach ist c = 0,10465 Par. Fuß; f = 336,90496 Par. Lin.; g = 336,90352; log f = 2,5275074048; log g = 2,5275055485;

folglich $p = \frac{0,10465}{0,0000018563} (\log f - \log y) = 56375,5$ $(\log f - \log y)$.

Durch diese Formel erhält man die gesuchte Höhe in Par. Fuß über der Oberfläche der Erde, oder, wie man sagt, über der Meeresfläche, wo der Barometerstand = 0,76 Meter ist.

Ist an einem andern Orte, dessen Höhe über der Meeresfläche = q ist, der Barometerstand in Par. Lin. = z, so ist ebenfalls $q = 56375,5 (\log f - \log z)$; folglich $p - q = 56375,5 (\log z - \log y)$; wodurch man den Höhenunterschied der beyden Oerter, an welchen die Barometerstände y und z sind, findet.

Bey dieser Formel wird vorausgesetzt, daß die Temperatur des Quecksilbers im Barometer = 0 sey. Wo dieß also nicht schon von selbst statt findet, da muß der Barome-

terstand darauf zurückgeführt werden; und dieß geschieht, indem man die Temperatur, wenn sie in Reaum. Graden ausgedrückt ist, mit $\frac{1}{4440}$ multiplizirt, mit dem dadurch entstandenen Bruch den Barometerstand selbst multiplizirt, und das Produkt von demselben subtrahirt, oder dazu addirt, je nachdem die Temperatur über, oder unter Null ist.

Es ist aber noch eine zweyte Verbesserung nöthig, welche von der Temperatur der Luft abhängig ist, da die Dichtigkeit und Elastizität derselben bey verschiedenen Graden der Wärme gleichfalls verschieden ist. Für die Temperatur der Luft an beyden Stationen nimmt man das arithmetische Mittel zwischen den Temperaturen der untern und obern Station an, und setzt sie also $= \frac{t + t'}{2}$, wenn jene $= t$, diese $= t'$ ist, und rechnet, daß die zu findende Höhe für jeden Grad Reaum. über Null um $\frac{1}{213,3} = 0,004688$ vermehrt werden muß. Hiernach bekommt die obige Formel folgende Gestalt:

$$p - q = 56375,5\,(1 + 0,004688\,\frac{t + t'}{2})\,.\,(\log z - \log y),$$

wobey z und y schon auf 0 Temperatur gebracht seyn müssen.

Indessen muß bemerkt werden, daß mit diesen Verbesserungen noch nicht alles abgethan ist, was zur möglich größten Genauigkeit der Formel erfordert wird. Es lassen sich noch Verbesserungen in Beziehung auf die Einwirkung der Dünste in der Luft, die Verschiedenheit der Schwere unter verschiedenen Graden der Breite und in verschiedenen Höhen, und die Capillarität der Glasröhren anbringen, wodurch natürlich die Formel viel zusammengesetzter wird. Da jedoch in den meisten Fällen die dadurch erreichte Berichtigung nur unbeträchtlich ist, so können sie hier unberücksichtigt bleiben.

Nach de Lüc's sonst häufig gebrauchter Regel (s. mein Lehrb. der Physik S. 416) ist $c = 12,945..$ Toisen, $f = 336$ Par. Lin., $g = 335$ Par. Lin., woraus sich der Coeffizient $\frac{c}{\log f - \log y} =$

10000 ergiebt, und der Höhenunterschied in Toisen ausgedrückt wird.

Wendet man zur Entwickelung der obigen Formel die Rechnung des Unendlichen an, so kann die Rechnung sehr abgekürzt werden.

311. Hier müssen zuerst die Barometerstände auf 0 R. zurückgeführt werden. Dieß giebt für die untere Station $327,4 - \frac{22,6}{4440} . 327,4 = 327,4 (1 - \frac{22,6}{4440}) = 327,4 . \frac{4417,4}{4440}$ $= 325,733$; für die obere $192,5 (1 + \frac{2,5}{4440}) = 192,5 . \frac{4442,5}{4440}$ $= 192,608$. Dann ist $\log z - \log y = 0,2281874$; ferner ist $\frac{t+t'}{2} = 10$; folglich $p - q = 56375,5 . 1,04688 . 0,228187$ $= 13467$. Hierzu die Höhe des untern Standpunkts $= 81$ F. und zum obern Standpunkt noch 3 F. giebt die Höhe des Montblanc über dem Genfer See $= 13551$ P. F.

312. Der reduzirte Barometerstand an der obern Station ist $= 237,73$ P. L.; der an der untern $= 324,98$ P. L.; das Mittel der Temperaturen in freyer Luft $= 9,25$ R.; $\log z - \log y = 0,1357774$. Der Höhenunterschied $=$ $56375,5 . 1,043364 . 0,13577 = 7986$ P. F.

313. Es sey der Kreis Fig. 54. die Himmelskugel, HR der wahre Horizont für die gegebene Polhöhe PR, Z das Zenith, AQ der Äquator, mn der Parallelkreis, in welchem sich die Sonne bewegt, SD = td die Abweichung derselben, hr der Dämmerungskreis. Alsdann ist St der Bogen, welchen die Sonne während der Dämmerung durchläuft, und dieser ähnlich dem Bogen des Äquators Dd, so wie Sm der halbe Tagebogen der Sonne, ähnlich dem Bogen DA. Es ist aber $Dd = Ad - AD = \angle APd - \angle APD$. Es kommt also darauf an, diese beyden Winkel zu finden.

Zu diesem Ende suche man in dem sphärischen Dreyeck ZPt, aus der Seite $ZP = 90 - P$, $Pt = 90 - D$, und

$Zt = 90 +$ dem Abstand, p, des Dämmerungskreises vom Horizont, den Winkel $ZPt = APd$. Man erhält

$$\cos APd = \frac{\cos Zt - \cos ZP \cdot \cos Pt}{\sin ZP \cdot \sin Pt}$$

$$= - \frac{\sin p + \sin P \cdot \sin D}{\cos P \cdot \cos D}.$$

Ferner ist $\cos APD = - \operatorname{tang} P \cdot \operatorname{tang} D$ (s. Nr. 293.).

1. Zus. Ist die Abweichung der Sonne südlich, so wird $\sin D$ und $\operatorname{tang} D$ negativ, und daher

$$\cos APd = \frac{\sin P \cdot \sin D - \sin p}{\cos P \cdot \cos D}$$

$$\cos APD = \operatorname{tang} P \cdot \operatorname{tang} D.$$

2. Zus. Für $D = 0$ d. h. zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche werden auch $\sin D$ und $\operatorname{tang} D = 0$; folglich

$$\cos APd = - \frac{\sin p}{\cos P}$$

und $\cos APD = 0$. Also $\angle APD = 90^\circ$.

3. Zus. Für $P = 0$ d. i. unter dem Äquator ist

$$\cos APd = - \frac{\sin p}{\cos D}$$

und $\cos APD = 0$.

Da $\cos D$ desto kleiner wird, je größer D, so wird $\frac{\sin p}{\cos D}$ desto größer. Folglich wächst auch der stumpfe Winkel APd mit der Zunahme der Abweichung der Sonne, und eben so auch der Unterschied der beyden Winkel $APd - APD$. Für $D = 0$ wird $\cos APd = - \sin p$; und $APd = 90 + p$. Folglich $APd - APD = p$. Die Dämmerung ist also unter dem Äquator zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen am kürzesten.

Anmerk. Wird $p = 18^\circ$ gesetzt, so geben die vorstehenden Gleichungen, wenn man die Bogen in Zeit verwandelt, die Dauer der astronomischen Dämmerung; für $p = 6^\circ$ die der bürgerlichen.

314. Nach 313. 2. Zus. ist

die astron. D. in N.	1 St. 38 M.,	in Dr. 1 St. 58 M.,	in Arch. 3 St. 4 M.
= bürgerl. = = =	32 Min. = =	38 Min. = =	56 M.

315. Für diesen Fall muß $\cos APd = -1$; also $\sin p = \cos P$ werden. Folglich ist $P = 72^\circ$. Die Abenddämmerung dauert dann von Sonnenuntergang bis Mitternacht, und dann schließt sich sogleich die Morgendämmerung an.

316. Für die astronomische Dämmerung bey nördlicher Abweichung findet sich

$$APd = 147^\circ\ 3'\ 38''$$
$$APD = 109^\circ\ 19'\ 22''$$
$$APd - APD = 37^\circ\ 44'\ 16'' = 2\ \text{St.}\ 31\ \text{Min.}$$

Für die bürgerliche ist

$$APd = 120^\circ\ 11'\ 18''$$
$$APD = 109\ \ 19\ \ 22$$
$$APd - APD = 10^\circ\ 51'\ 56'' = 43\ \text{Min.}\ 28\ \text{Sec.}$$

Bey südlicher Abweichung ist für die astronom. Dämmerung

$$APd = 100^\circ\ 13'\ 20''$$
$$APD = 70\ \ 40\ \ 38$$
$$APd - APD = 29^\circ\ 32'\ 42'' = 1\ \text{St.}\ 58\ \text{Min.}$$

Für die bürgerliche ist

$$APd = 80^\circ\ 51'\ 19''$$
$$APD = 70\ \ 40\ \ 38$$
$$APd - APD = 10^\circ\ 10'\ 41'' = 41\ \text{Min.}\ 21\ \text{Sec.}$$

317. Derjenige Parallelkreis, von dessen wahrem Horizont die Sonne um Mitternacht 18 Grad entfernt ist. Und da die Sonne an diesem Tage $23^\circ\ 28'$ über dem Äquator steht, so macht der Äquator selbst mit dem Horizont einen Winkel von $41^\circ\ 28'$. Folglich ist die Polhöhe der Örter, für welche diese Stellung des Äquators gilt $= 90^\circ - 41^\circ\ 28' = 48^\circ\ 32'$. Diese macht also die Gränze für denjenigen Theil der Erdkugel, in welchem die astronomische Dämmerung zur Zeit des längsten Tages noch die ganze Nacht hindurch dauert. An Örtern von geringerer Breite ist ihre Dauer kürzer.

318. Es sey der Abstand der Mittelpunkte beyder Weltkörper von einander $= a$, die gesuchte Entfernung in Halbmessern der Erdkugel $= x$, die anziehende Kraft der Erde an ihrer Oberfläche $= P$, in der gesuchten Entfernung aber $= p$; alsdann ist $p = \frac{P}{x^2}$, weil die Stärke der Anziehung abnimmt, wie das Quadrat der Entfernung zunimmt.

Ferner sey die anziehende Kraft des Mondes, in einer Entfernung von seinem Mittelpunkte = dem Halbmesser der Erde, $= P'$, und in der Entfernung $= a - x$ sey sie $= p'$; so ist $p' = \frac{P'}{(a-x)^2}$. Da nun $p = p'$ seyn soll und $P' = \frac{1}{80} P$ ist, so ist $\frac{P}{x^2} = \frac{P}{80\,(a-x)^2}$. Folglich $x^2 = 80\,(a-x)^2 = 80\,(a^2 - 2ax + x^2)$, und hieraus $79x^2 - 160\,ax = -80\,a^2$. Dieß mit 79 dividirt, ergänzt und die Quadratwurzel ausgezogen, giebt $x = \frac{80 \pm \sqrt{80}}{79} a = \frac{80 \pm 8{,}94427\ldots}{79} a$. Da x nicht größer, als a seyn kann, so gilt hier der negative Werth der Wurzel, also $x = \frac{71{,}05572}{79} a$.

Wird $a = 60$ Erdhalbmesser gesetzt, so ist $x = 53{,}966\ldots$ $a - x = 6{,}033\ldots$

Nimmt man für x den positiven Werth der Wurzel, also $x = \frac{88{,}94427}{79} a = 1{,}12587\ldots a = 67{,}552\ldots$ Erdhalbmesser; und $a - x = -7{,}552\ldots$ Erdhalbmesser, d. h. 7,552 Erdhalbmesser nach der entgegengesetzten Richtung von dem obigen $a - x$; so erhält man ebenfalls 2 Entfernungen, in welchen die Anziehung der Erde und die des Mondes gleich groß ist. In diesem Fall aber liegt der angezogene Körper nicht zwischen der Erde und dem Monde, sondern jenseits des Mondes.

3.
C
O
A
E
B
M
C
N
A
E
B
F
D
G
9.
M
A
F
O
14.
A
C
D
E
B
H
E
B
C
A
D
R
A
x
B
B'
E'
E
H
N
M
A
B
A
O
33.
A
B

Staatliche Bibliothek
Regensburg

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Kries, Friedrich Christian,

Sammlung physikalischer Aufgaben nebst ihrer Auflösung zum Gebrauch in Schulen und beym Selbstunterricht

Jena 1843

Regensburg, Staatliche Bibliothek -- 999/Philos.5075
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11112187-8